Jméno: **login:**

X. Písemka z lineární algebry I, únor 2001 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & b \\ a & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$. Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je roven 0? (*2 body*)

2. V $\mathbb{R}^3$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(1,2,0) + \alpha(0,-2,1) + \beta(1,-2,-1)$. (*2 body*)

3. V $\mathbb{R}^3$ uvažujme rovinu $\rho : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, přímku $p : x_2 + x_3 = 3, x_2 - x_3 = -1$ a bod $M = (1,2,3)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná přímku p a je rovnoběžná s rovinou ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (*3 body*)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ x_2 + x_3 + x_4 = 1$ a přímky $p : (3,4,-3,-2) + t(1,1,-1,-1)$. (*3 body*)

5. Najděte matici přechodu $(id)_{\beta,\alpha}$ od báze $\alpha = (1-x, 1+x, x^2)$ k bázi $\beta = (1+2x, x, x^2 - x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$. (*2 body*)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_5, x_1 - x_5).$$

a) Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$.
b) Najděte bázi $\operatorname{Im} f$.
c) Najděte jeden vektor v $\mathbb{R}^5$, který neleží v $\operatorname{Im} f$. (*3 body*)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište (pečlivě!) definici lineárního zobrazení. (*2 body*)

2. Napište (pečlivě!) definici hodnosti matice. (*2 body*)

3. Permutaci $(4,3,6,1,2,5)$ napište jako složení transpozic. (Permutace skládáme jako zobrazení, tj. začínáme zprava.) (*2 body*)

4. Dokažte: Má-li matice A inverzní matici, pak $\det A \neq 0$. (*2 body*)

5. Vypočtěte determinant matice $n \times n$, která má na vedlejší diagonále čísla 1 a všude jinde 0. Výpočet zdůvodněte. (*2 body*)

6. Popište všechna lineární zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}$. (*2 body*)

7. Dokažte, že v $\mathbb{R}^4$ přímka p a třírozměrný afinní podprostor ρ nemohou být mimoběžné. (*2 body*)

8. Napište nějaký vektorový podprostor V prostoru $\mathbb{C}^{3\times 3}$ komplexních matic 3×3, který je různý od 0 a $\mathbb{C}^{3\times 3}$. (*1 bod*)

Jméno: **login:**

Y. Písemka z lineární algebry I, únor 2001 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & b \\ a & a & b & b \\ a & b & b & b \end{pmatrix}$. Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je roven 0? (*2 body*)

2. V $\mathbb{R}^3$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(1,2,2) + \alpha(2,3,-6) + \beta(0,1,2)$. (*2 body*)

3. V $\mathbb{R}^3$ uvažujme rovinu $\rho : 2x_1 + x_2 + x_3 = 5$, přímku $p : x_1 - x_2 = 1, x_1 + x_3 = 6$ a bod $M = (3,2,1)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná přímku p a je rovnoběžná s rovinou ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (*3 body*)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + x_3 + x_4 = 4,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$ a přímky $p : (4,-2,3,-1) + t(1,-1,1,-1)$. (*3 body*)

5. Najděte matici přechodu $(id)_{\beta,\alpha}$ od báze $\alpha = (1-2x, x^2, 1+2x)$ k bázi $\beta = (1+5x, x^2+x, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$. (*2 body*)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_5 - x_4, x_5 - x_1).$$

a) Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$.
b) Najděte bázi $\operatorname{Im} f$.
c) Najděte jeden vektor v $\mathbb{R}^5$, který neleží v $\operatorname{Im} f$. (*3 body*)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Popište všechna lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. (*2 body*)

2. Napište (pečlivě!) definici vektorového podprostoru. (*2 body*)

3. Permutaci $(5,3,4,1,6,2)$ napište jako složení transpozic. (Permutace skládáme jako zobrazení, tj. začínáme zprava.) (*2 body*)

4. Napište (pečlivě!) definici lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ve vektorovém prostoru U. (*2 body*)

5. Dokažte, že v $\mathbb{R}^4$ přímka p a třírozměrný afinní podprostor ρ nemohou být mimoběžné. (*3 body*)

6. Vypočtěte determinant matice $(n-1) \times (n-1)$, která má na vedlejší diagonále čísla 1 a všude jinde 0. Výpočet zdůvodněte. (*2 body*)

7. Dokažte: Je-li $\det A = 0$, pak matice A nemá inverzní matici. (*2 body*)

8. Napište nějaký vektorový podprostor V prostoru $\mathbb{C}^{2\times 2}$ komplexních matic 2×2, který je různý od 0 a $\mathbb{C}^{2\times 2}$. (*1 bod*)