5. BÁZA A DIMENZIA

V tejto kapitole sa oboznámime s pojmom *bázy* vektorového priestoru, čo nám v niektorých vektorových priestoroch umožní zaviesť *súradnice*. Ďalej budeme definovať *dimenziu* vektorového priestoru a odvodíme si niektoré jej základné vlastnosti. V nasledujúcej kapitole si potom okrem iného dokážeme, že dimenzia je základný štruktúrny invariant tzv. *konečnorozmerných* vektorových priestorov.

I v tejto kapitole V označuje nejaký vektorový priestor nad pevným poľom K.

5.1. Steinitzova veta a konečnorozmerné priestory

Začneme jedným technickým výsledkom kľúčového významu.

5.1.1. Steinitzova veta. *Nech $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \in V$. Ak vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ sú lineárne nezávislé a všetky patria do lineárneho obalu $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]$, tak $n \leq m$.*

Dôkaz. Keďže $\boldsymbol{u}_j \in [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]$ pre každé $j \leq n$, existujú $\boldsymbol{c}_j = (c_{1j}, \dots, c_{mj})^T \in K^m$ také, že

$$\boldsymbol{u}_j = c_{1j}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_{mj}\boldsymbol{v}_m = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \cdot \boldsymbol{c}_j.$$

Inak povedané

$$(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \cdot \boldsymbol{C},$$

kde $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m \times n}$ je matica so stĺpcami $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n$.

Predpokladajme, že $m < n$. Potom podľa tvrdenia 3.3.6 má homogénna sústava $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ aspoň jedno riešenie $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \neq \boldsymbol{0}$. Jednoduchým výpočtom dostávame

$$\begin{aligned} x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n &= (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n) \cdot \boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

čo je v spore s lineárnou nezávislosťou vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$.

5.1.2 Tvrdenie. *Pre ľubovoľný vektorový priestor V nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) existuje konečná množina $X \subseteq V$ taká, že $[X] = V$;
(ii) každá lineárne nezávislá množina $Y \subseteq V$ je konečná.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech $X \subseteq V$ je konečná množina, ktorá generuje V. Podľa Steinitzovej vety pre ľubovoľné lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ platí $n \leq \# X$, teda každá lineárne nezávislá množina $Y \subseteq V$ je konečná.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Budeme dokazovať logicky ekivalentnú implikáciu $\neg$ (i) $\Rightarrow \neg$ (ii).

Predpokladajme, že žiadna konečná podmnožina priestoru V negeneruje V. Potom vo V môžeme zostrojiť postupnosť vektorov $(\boldsymbol{y}_n)_{n=0}^{\infty}$ takú, že $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{0}$ a pre každé $n > 0$ platí $\boldsymbol{y}_n \notin [\boldsymbol{y}_0, \dots, \boldsymbol{y}_{n-1}]$. Podľa tvrdenia 4.4.1 je každý počiatočný úsek $(\boldsymbol{y}_0, \dots, \boldsymbol{y}_n)$ tejto postupnosti lineárne nezávislý, takže celá postupnosť je lineárne nezávislá podľa tvrdenia 4.6.1. Teda vo V existuje nekonečná lineárne nezávislá množina (napr. $Y = \{\boldsymbol{y}_n;\, n \in \mathbb{N}\}$).

Hovoríme, že vektorový priestor V je *konečnorozmerný*, ak spĺňa niektorú (teda nevyhnutne obe) z ekvivalentných podmienok (i), (ii) práve dokázaného tvrdenia. V opačnom prípade hovoríme, že V je *nekonečnorozmerný* vektorový priestor.

5.2. Báza a dimenzia konečnorozmerného priestoru

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. *Bázou* priestoru V nazývame každú lineárne nezávislú usporiadnú n-ticu $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ vektorov z V, ktorá generuje celý priestor V. Stručne tiež hovoríme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ tvoria bázu priestoru V.

Nasledujúce tvrdenie je priamym dôsledkom vety 4.4.4.

5.2.1. Tvrdenie. *Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom*

(a) ľubovoľnú lineárne nezávislú usporiadanú k-ticu $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ vektorov z V možno doplniť do nejakej bázy $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ priestoru V;

(b) z ľubovoľnej generujúcej usporiadanej m-tice $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ vektorov z V možno vybrať nejakú bázu $(\boldsymbol{v}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_n})$ priestoru V.

5.2.2. Veta. *Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom*

(a) V má aspoň jednu bázu;

(b) ľubovoľné dve bázy priestoru V majú rovnaký počet prvkov.

Dôkaz. (a) je bezprostredným dôsledkom predchádzajúceho tvrdenia, ktoré nám dokonca dáva dva varianty dôkazu: jeden doplnením prázdnej množiny (ktorá je lineárne nezávislá) na bázu vo V, druhý výberom bázy z nejakej generujúcej množiny vo V.

(b) je zasa bezprostredným dôsledkom Steinitzovej vety. Ak sú totiž $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ dve bázy vo V, tak, keďže $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je lineárne nezávislá a $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ generuje celý priestor V, musí platiť $n \leq m$. Nakoľko však i $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ je lineárne nezávislá a $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ generuje celé V, platí tiež $m \leq n$. Teda $m = n$.

Práve dokázaná veta nám umožňuje korektne definovať *dimenziu* alebo tiež *rozmer* konečnorozmerného vektorového priestoru V ako počet prvkov jeho ľubovoľnej bázy. Dimenziu vektorového priestoru V značíme $\dim V$. Ak $\dim V = n$, hovoríme, že V je *n-rozmerný* vektorový priestor. Ak V je nekonečnorozmerný priestor, kladieme $\dim V = \infty$. V prípade, že bude potrebné zdôrazniť úlohu poľa K, budeme používať podrobnejšie označenie $\dim_K V$.

Teda V je konečnorozmerný práve vtedy, keď $\dim V < \infty$.

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

5.2.3. Tvrdenie. *Nech $\dim V = n$, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \in V$. Potom ľubovoľné dve z nasledujúcich podmienok implikujú tretiu:*

(i) vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ sú lineárne nezávislé;

(ii) $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

To okrem iného znamená, že na overenie, či n vektorov $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ tvorí bázu n-rozmerného vektorového priestoru V, stačí overiť len jednu (a to ľubovoľnú) z podmienok (i), (ii).

5.3. Súradnice vektora vzhľadom na danú bázu

Nasledujúca veta je špeciálnym prípadom vety 4.4.2.

5.3.1. Veta. *Vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru V práve vtedy, keď každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ možno jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n$.*

Uvedomme si, že existencia aspoň jedného vyjadrenia $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n$ je ekvivalentná s podmienkou, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ generujú V. Jednoznačnosť tohto vyjadrenia je zasa ekvivalentná s lineárnou nezávislosťou vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$.

Teda $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je bázou V vtedy a len vtedy, keď pre každé $\boldsymbol{x} \in V$ existuje práve jedno $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$ také, že

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{c}.$$

Tento jednoznačne určený stĺpcový vektor $\boldsymbol{c} \in K^n$ budeme nazývať *súradnice vektora $\boldsymbol{x}$ vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$* a označovať

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Teda každá báza $\boldsymbol{\alpha}$ v n-rozmernom vektorovom priestore V definuje *súradnicové zobrazenie* $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ z V do stĺpcového vektorového priestoru K^n.

Jednoduchý dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

5.3.2. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je báza konečnorozmerného vektorového priestoru V. Potom príslušné súradnicové zobrazenie $V \to K^n$ je bijektívne a zachováva lineárne kombinácie, t.j. pre ľubovoľné $a, b \in K$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí*

$$(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = a(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} + b(y)_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

K nemu inverzné zobrazenie $K^n \to V$ je dané predpisom $\boldsymbol{c} \mapsto \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{c}$.

V označení posledného tvrdenia teda pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{c} \in K^n$ platí

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{c}.$$

Prvá rovnosť ukazuje, ako možno vektor $\boldsymbol{x}$ zrekonštruovať z danej bázy $\boldsymbol{\alpha}$ a jeho súradníc $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ v tejto báze; druhá zachytáva zrejmý fakt, že súradnice lineárnej kombinácie $\sum_{i=1}^n c_i\boldsymbol{u}_i$ v báze $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ tvorí vektor $(c_1, \dots, c_n)^T$.

Práve zavedené súradnice by sme mohli podrobnejšie nazvať *stĺpcovými súradnicami* vzhľadom na danú bázu. Podobným spôsobom možno zaviesť i *riadkové súradnice* a dokázať pre ne analogické tvrdenia ako pre stĺpcové. V takom prípade je samozrejme vhodnejšie zapisovať príslušnú bázu ako stĺpcový vektor $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)^T$ a v prípade riadkového priestoru $V = K^n$ ju stotožniť s maticou s riadkami $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$. Podrobnosti prenechávame na doplnenie čitateľovi.

5.3.3. Príklad. Označme $\boldsymbol{e}_i^{(n)} = \boldsymbol{s}_i(\boldsymbol{I}_n) \in K^n$ stĺpcový vektor pozostávajúci zo samých núl, okrem i-tej zložky, ktorá je 1. Potom $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \left(\boldsymbol{e}_1^{(n)}, \dots, \boldsymbol{e}_n^{(n)}\right)$ je báza stĺpcového vektorového priestoru K^n. Nazývame ju *kanonickou bázou* tohto priestoru.

Túto bázu možno zrejmým spôsobom stotožniť s jednotkovou maticou $\boldsymbol{I}_n$. Pokiaľ nebude hroziť nedorozumenie, budeme horný index (n) vynechávať a príslušnú bázu označovať stručne $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$. Pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

preto $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{x}$, t.j. každý vektor $\boldsymbol{x} \in K^n$ splýva so svojimi vlastnými súradnicami v kanonickej báze.

Kanonická báza riadkového vektorového priestoru K^n je tvorená riadkami jednotkovej matice $\boldsymbol{I}_n$ a značíme ju rovnako ako v predchádzajúcom prípade $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \left(\boldsymbol{e}_1^{(n)}, \dots, \boldsymbol{e}_n^{(n)}\right)^T$ alebo stručne $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)^T$, len s tým rozdielom, že $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \boldsymbol{\varepsilon}$ je teraz stĺpec vektorov a každé $\boldsymbol{e}_i$ je riadok pozostávajúci zo samých núl, okrem i-teho mesta, ktoré je 1.

V predošlom príklade je, okrem iného, zahrnutý aj dôkaz nasledujúceho očakávaného výsledku.

5.3.4. Veta. *Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platí* $\dim K^n = n$.

5.3.5. Príklad. Stĺpce matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoria bázu $\boldsymbol{\alpha}$ (stĺpcového) vektorového priestoru K^4 (presvedčte sa o tom s využitím tvrdenia 5.2.3 a vety 5.3.4). Súradnice vektora $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$ sú dané vzťahom

$$(x)_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Overte.

5.3.6. Príklad. Označme $\boldsymbol{\xi}^{(n)} = (1, x, \dots, x^n)$ usporiadanú $(n+1)$-ticu prvých $n+1$ mocnín premennej x. Ľahko nahliadneme, že $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ je báza vektorového priestoru $K^{(n)}[x]$ všetkých polynómov stupňa $\le n$ v premennej x nad poľom K. Súradnice polynómu $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ v tejto báze tvorí vektor

$$(f)_{\boldsymbol{\xi}^{(n)}} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T \in K^{n+1}.$$

Teda $\dim K^{(n)}[x] = n+1$. Na druhej strane vektorový priestor $K[x]$ všetkých polynómov v premennej x nad poľom K zrejme nie je konečnorozmerný, teda $\dim K[x] = \infty$.

5.3.7. Príklad. Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Pre ľubovoľné $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ označme $\boldsymbol{E}_{kl}^{(m,n)} = \boldsymbol{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m\times n}$ maticu typu $m \times n$ nad poľom K, pozostávajúcu zo samých núl, okrem miesta (k, l), na ktorom je 1. Zrejme každú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{kl}) \in K^{m\times n}$ možno jednoznačne vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\boldsymbol{E}_{kl},$$

z čoho vyplýva, že matice $\boldsymbol{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoria bázu vektorového priestoru $K^{m\times n}$ všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom K. Jej špeciálnym prípadom je kanonická báza $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ v priestore K^n. Dostávame tak ďalší očakávaný vzťah: $\dim K^{m\times n} = mn$.

5.3.8. Príklad. Pole $\mathbb{C}$ všetkých komplexných čísel je rozšírením poľa $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel. Teda $\mathbb{C}$ možno považovať za vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$ (pozri príklad 1.6.1). Každé komplexné číslo z možno jednoznačne vyjadriť v tvare

$$z = a + b\mathrm{i} = a1 + b\mathrm{i},$$

kde $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ sú reálne čísla, nazývané *reálna* resp. *imaginárna časť* komplexného čísla z, a i je *imaginárna jednotka*. To znamená, že komplexné čísla (t. j. vektory) 1, i tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{C}$ nad poľom $\mathbb{R}$. Súradnicové zobrazenie vzhľadom na túto bázu je dané vzťahom

$$(z)_{(1,\mathrm{i})} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) \end{pmatrix},$$

kde $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ je číslo *komplexne združené* k číslu $z = a + b\mathrm{i}$. Teda $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Na druhej strane každé pole K, uvažované ako vektorový priestor nad sebou samým má dimenziu 1, t. j. $\dim_K K = 1$. Špeciálne $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$ aj $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

5.4. Dimenzia súčtu a súčinu vektorových priestorov

V tomto paragrafe preskúmame niektoré základné vlastnosti dimenzie, uvažovanej ako zobrazenie definované na všetkých vektorových priestoroch nad pevným poľom K.

Na začiatok si uvedomme, že ľubovoľný lineárny podpriestor S vektorového priestoru V je i sám vektorovým priestorom nad tým istým poľom, teda pojmy ako báza podpriestoru S a dimenzia podpriestoru S majú dobre definovaný význam. Zrejme každý podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru je i sám konečnorozmerný.

5.4.1. Veta. *Nech S, $T \subseteq V$ sú konečnorozmerné lineárne podpriestory vektorového priestoru V. Potom*

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

Dôkaz. Označme $\dim S = m$, $\dim T = n$, $\dim(S \cap T) = k$. Nech $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ je báza podpriestoru $S \cap T$. Doplňme túto bázu do bázy $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-k}$ podpriestoru S, a taktiež do bázy $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-k}$ podpriestoru T. Dokážeme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{m-k}, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}$ tvoria bázu podpriestoru $S+T$. Tým budeme hotoví, lebo potom naozaj platí

$$\begin{aligned}\dim(S+T) &= k + (m-k) + (n-k) = m + n - k \\ &= \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).\end{aligned}$$

Keďže vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{m-k}, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}$ zrejme generujú podpriestor $S+T$ (premyslite si detaily), zostáva dokázať, že sú tiež lineárne nezávislé. Nech $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{m-k}, c_1, \dots, c_{n-k}$ sú skaláry také, že

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + a_k\boldsymbol{u}_k + b_1\boldsymbol{v}_1 + \dots b_{m-k}\boldsymbol{v}_{m-k} + c_1\boldsymbol{w}_1 + \dots + c_{n-k}\boldsymbol{w}_{m-k} = \boldsymbol{0}.$$

Potom

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + a_k\boldsymbol{u}_k + b_1\boldsymbol{v}_1 + \dots b_{m-k}\boldsymbol{v}_{m-k} = -(c_1\boldsymbol{w}_1 + \dots + c_{n-k}\boldsymbol{w}_{m-k}),$$

pričom vektor na ľavej strane patrí do S a vektor na pravej do T. Túto spoločnú hodnotu $\boldsymbol{z} \in S \cap T$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu len vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$. Z jednoznačnosti vyjadrenia $\boldsymbol{z}$ v báze $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{m-k}$ podpriestoru S tak dostávame $b_1 = \dots = b_{m-k} = 0$. Preto

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + a_k\boldsymbol{u}_k + c_1\boldsymbol{w}_1 + \dots c_{m-k}\boldsymbol{w}_{n-k} = \boldsymbol{0}.$$

Z lineárnej nezávislosti bázy $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}$ podpriestoru T potom vyplýva $a_1 = \dots = a_k = 0$, $c_1 = \dots = c_{n-k} = 0$. Teda $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{m-k}, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}$ sú lineárne nezávislé vektory.

5.4.2. Dôsledok. *Nech S, T sú lineárne podpriestory vektorového priestoru V. Potom $S \cap T = \{\boldsymbol{0}\}$, t. j. súčet $S+T$ je direktný, práve vtedy, keď*

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T.$$

Práve dokázané vzťahy pre dimenzie konečnorozmerných podpriestorov nejakého vektorového priestoru nápadne pripomínajú vzťah

$$\#\,(X \cup Y) = \#\,X + \#\,Y - \#\,(X \cap Y)$$

pre počty prvkov konečných množín z paragrafu 0.2, ktorý sa v prípade disjunktných množín redukuje na rovnosť

$$\#\,(X \cup Y) = \#\,X + \#\,Y.$$

To znamená, že konečnorozmerné vektorové priestory (hoci v typickom prípade priestorov nenulovej dimenzie nad nekonečným poľom ide o nekonečné množiny) sa správajú do značnej miery podobne ako konečné množiny. Dimenzia $\dim V$ konečnorozmerného priestoru V je tak akousi mierou jeho „veľkosti“, podobne ako počet prvkov $\#\,X$ je mierou veľkosti konečnej množiny X. Direktný (priamy) súčet lineárnych podpriestorov je tak analógiou zjednotenia disjunktných množín.

Na rozdiel od multiplikatívneho charakteru počtu prvkov karteziánskeho súčinu konečných množín, ktorý je daný formulou

$$\#\,(X \times Y) = \#\,X \cdot \#\,Y,$$

sa však dimenzia priameho súčinu konečnorozmerných vektorových priestorov (pozri príklad 1.6.4) správa aditívne, t. j. do značnej miery podobne ako logaritmus.

5.4.3. Tvrdenie. *Nech V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K. Potom pre dimenziu ich priameho súčinu platí*

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ je báza priestoru V a $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ je báza priestoru W. Stačí overiť, že vektory $(\boldsymbol{v}_1, \mathbf{0}), \dots, (\boldsymbol{v}_m, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \boldsymbol{w}_1), \dots, (\mathbf{0}, \boldsymbol{w}_n)$ tvoria bázu priameho súčinu $V \times W$. Podrobnosti prenechávame čitateľovi.

V dôsledku toho pre konečnorozmerné priestory $V_1, \dots, V_k$ nad poľom K platí

$$\dim(V_1 \times \ldots \times V_k) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k,$$

a pre k-tu priamu mocninu V^k priestoru V máme

$$\dim V^k = k \dim V.$$

Poznámka. Ak obvyklým spôsobom rozšírime aritmetiku prirodzených čísel aj na symbol ∞, t. j. položíme $n + \infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$ pre $n \in \mathbb{N}$, $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ a $n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty \cdot \infty = \infty$ pre $n > 0$, ľahko nahliadneme, že vzťahy dokázané v tomto paragrafe zostávajú v platnosti aj pre nekonečnorozmerné priestory.

5.5. Usporiadané a neusporiadané bázy

Ak $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je báza vektorovévo priestoru V, tak $(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)})$ je tiež báza V pre ľubovoľnú premutáciou σ množiny $\{1, \dots, n\}$. Inak povedané, vlastnosť „byť bázou vektorového priestoru“ nezávisí od poradia vektorov v báze – nie je to ani tak vlastnosť príslušnej usporiadanej n-tice $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ ako skôr množiny $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$. Na druhej strane je rozumné považovať bázy $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ a $(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je neidentická permutácia, za rôzne. Prislúchajú im totiž rôzne súradnicové zobrazenia. Napr. $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)$ sú bázy stĺpcového priestoru K^3, líšiace sa len poradím svojich vektorov. Pre súradnice ľubovoľného vektora $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in K^3$ v týchto bázach však platí:

$$(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Teda $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\eta}}$, okrem prípadu, keď $x_1 = x_2 = x_3$.

Doteraz študované bázy by sme vlastne mali presnejšie nazývať *konečnými usporiadanými bázami.* To naznačuje možnosti uvažovať jednak o nekonečných, jednak o „neusporiadaných“ bázach. Keďže v centre nášho záujmu naďalej zostávajú iba konečnorozmerné priestory, oboch týchto otázok sa len letmo dotkneme.

Hovoríme, že nekonečná postupnosť $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k, \dots)$ je *báza*, presnejšie *usporiadaná báza* vektorového priestoru V, ak je lineárne nezávislá a generuje celý priestor V.

Treba zdôrazniť, že podmienka generovania priestoru V hovorí, že každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ možno vyjadriť ako *konečnú* lineárnu kombináciu $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{n} c_k \boldsymbol{u}_k$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $c_0, \dots, c_n \in K$, prvkov príslušnej bázy. „Nekonečné lineárne kombinácie“ tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{u}_k$ sme zatiaľ nedefinovali a len samotná algebraická štruktúra vektorého priestoru nám to vo všeobecnosti ani neumožňuje.

Nasledujúce tvrdenie, ktorého dôkaz neuvádzame, je obdobou tvrdenia 5.3.1.

5.5.1. Tvrdenie. *Postupnosť vektorov* $(\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *je bázou vektorového priestoru* V *práve vtedy, keď každý vektor* $\boldsymbol{x} \in V$ *možno jednoznačne až na nulové členy vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie*

$$\boldsymbol{x} = c_0\boldsymbol{u}_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ *a* $c_0, c_1, \ldots, c_n \in K$.

Uvedomme si podstatnosť vsuvky „až na nulové členy“. Vzhľadom na premennú hodnotu n dĺžky príslušnej lineárnej kombinácie možno napr. vektor $\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_1 \in V$ písať aj v tvare $\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{u}_2 + 0\boldsymbol{u}_3$ a pod.

Na druhej strane, pri danej báze $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ priestoru V každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ jednoznačne určuje postupnosť skalárov $(c_k)_{k=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}}$ takú, že $c_k = 0$ pre všetky k až na konečný počet, t. j. $(c_k)_{k=0}^{\infty} \in K^{(\mathbb{N})}$ (pozri príklad 4.1.3 (a)), a platí

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\boldsymbol{u}_k.$$

Všimnite si, že takéto lineárne kombinácie obsahujú len konečne mnoho nenulových sčítancov, takže s ich definíciou nie je žiaden problém. Uvedenú postupnosť $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ potom nazývame *súradnicami vektora* $\boldsymbol{x}$ *vzhľadom na bázu* $\boldsymbol{\alpha}$ a označujeme ju $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$. (Vzhľadom na to, že nemienime ďalej rozvíjať príslušnú teóriu pre nekonečnorozmerné priestory, nemá zmysel bližšie špecifikovať, či tým mienime „riadkovú“ alebo „stĺpcovú“ postupnosť $(c_k)_{k=0}^{\infty}$.)

5.5.2. Príklad. Postupnosť $\boldsymbol{\xi} = (x^n)_{n=0}^{\infty} = (1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ všetkých mocnín premennej x je bázou priestoru $K[x]$ všetkých polynómov v premennej x nad poľom K. (Presvedčte sa o tom.) Súradnicami polynómu

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in K[x]$$

v tejto báze je postupnosť

$$(f)_{\boldsymbol{\xi}} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in K^{(\mathbb{N})}.$$

Podmnožinu X vektorového priestoru V nazývame *bázou*, presnejšie *neusporiadanou bázou* priestoru V, ak X je lineárne nezávislá a $[X] = V$. Používa sa tiež názov *Hamelova báza.*

Aj v prípade Hamelových báz platí obdoba tvrdení 5.3.1 a 5.5.1, čo umožňuje zaviesť na priestore V s takouto bázou súradnicové zobrazenie $V \to K^{(X)}$ (pripomíname, že $K^{(X)}$ označuje vektorový priestor všetkých zobrazení $f\colon X \to K$ takých, že $f(\boldsymbol{x}) = 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in X$ až na konečný počet – pozri príklad 4.1.3). *Súradnicami vektora* $\boldsymbol{v} \in V$ *vzhľadom na bázu* X nazývame jednoznačne určené zobrazenie $f \in K^{(X)}$, pre ktoré platí

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}.$$

(Vzhľadom na konečný počet nenulových sčítancov je uvedená lineárna kombinácia dobre definovaná.) I tieto súradnice označujeme obvyklým spôsobom $(\boldsymbol{v})_X = f$.

Zostáva otázka, či aj každý nekonečnorozmerný vektorový priestor má bázu, podobne ako konečnorozmerné priestory resp. nekonečnorozmerné priestory polynómov $K[x]$. Inak povedané, radi by sme vedieť, či vôbec každý vektorový priestor má bázu. Na základe základných axióm teórie množín nemožno na túto otázku odpovedať. Až prijatie tzv. *axiómy výberu*, postulujúcej platnosť istého princípu platného pre konečné množiny aj pre nekonečné množiny, nám umožňuje dať na uvedenú otázku kladnú odpoveď. Teda za predpokladu axiómy výberu má každý vektorový priestor nad ľubovoľným poľom Hamelovu bázu. Na druhej strane pre väčšinu nekonečnorozmerných priestorov nám toto tvrdenie zaručuje skutočne len existenciu takejto bázy a nič viac. Nedáva nám nijakú konkrétnu bázu ani návod ako ju zostrojiť.

K príkladom vektorových priestorov, v ktorých nevieme nijako rozumne popísať Hamelovu bázu, hoci jej existenciu máme zaručenú, patria priestory K^X, kde X je nekonečná množina, priestor $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ všetkých spojitých funkcií z netriviálneho uzavretého interalu $\langle a, b\rangle$ do množiny $\mathbb{R}$, no taktiež polia $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$ uvažované ako vektorové priestory nad poľom $\mathbb{Q}$. Nie je to však až taká chyba, lebo v mnohých nekonečnorozmerných priestoroch študovaných vo funkcionálnej analýze sú užitočnejšie iné typy „báz“, umožňujúce vyjadrovať vektory z priestoru napr. v tvare istých „nekonečných lineárnych kombinácií“ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \boldsymbol{x}_n$ prvkov „bázy“.

*5.6. Fyzika v n-rozmernom priestore

Na záver kapitoly si dovolíme jedno odbočenie od hlavnej témy. Keď sa už toľko bavíme o dimenzii, môžeme spolu trochu porozmýšľať, ako sa trojrozmernosť „nášho“ priestoru prejavuje v matematickej podobe niektorých fyzikálnych zákonov. Na základe toho sa pokúsime o extrapoláciu týchto zákonov za hranice trojrozmerného priestoru. Inak povedané, podnikneme spolu metafyzikálny (nie metafyzický) myšlienkový experiment, v ktorom sa pokúsime trochu pošpekulovať nad otázkou, ako by asi mohla vyzerať „fyzika v n-rozmernom priestore“. Samozrejme, nie je jasné, či by pre $n \neq 3$ v n-rozmernom priestore mohli existovať vôbec nejakí „fyzici“, t. j. či by tú „fyziku“ mal kto pestovať. Touto otázkou sa však zaoberať nebudeme, hoci naše úvahy nám aj na ňu naznačia istú odpoveď. Ale nebudeme predbiehať.

Ak sa len trochu hlbšie zamyslíme nad charakterom priestoru, do ktorého sme nevdojak vrhnutí, uvedomíme si, že je plný záhad. Je konečný (ohraničený) alebo nekonečný (neohraničený)? Je diskrétny (pozostávajúci z akýchsi najmenších, ďalej už nedeliteľných častí) alebo spojitý (súvislý a donekonečna deliteľný)? Keďže skúsenosť nám na tieto otázky nedáva jednoznačnú odpoveď, filozofi sa oddávna pokúšali zodpovedať ich na základe špekulatívnych úvah. Aktuálne nekonečno, či už smerom do diaľky (t. j. smerom k čoraz väčším rozmerom) alebo smerom do hĺbky (t. j. smerom k čoraz menším rozmerom) sa však vymyká našim predstavám. Rovnako problematická je však predstava ohraničeného priestoru ako i predstava akejsi najmenšej, ďalej už nedeliteľnej priestorovej oblasti. Priestor si totiž nepredstavujeme ako súcno, t. j. ako „niečo“, ale ako prázdnu formu, naplnenú súcnami. Za hranicou, ohraničujúcou „celý priestor“, by už nemohlo byť absolútne nič, čo si však nedokážeme predstaviť inak, ako prázdny priestor. Podobne, akákoľvek malá priestorová oblasť, je aspoň myšlienkovo (hoc nie nutne fyzikálne) ďalej deliteľná na menšie časti.

Moderná fyzika sa s podobnými otázkami nevysporadúva nijakou definitívnou odpoveďou. Namiesto toho konštruuje rôzne matematické modely a na ich základe získava predpovede, ktoré možno porovnať s výsledkami experimentov. Tým sa tieto modely čiastočne potvrdzujú alebo falzifikujú. Navyše hypotéza zakriveného priestoru oddeľuje otázky (ne)konečnosti a (ne)ohraničenosti. Zakrivený priestor môže byť (sám v sebe) neohraničený a pritom mať konečný objem. Ale tak, ako zakrivená guľová plocha poukazuje na existenciu trojrozmerného (nezakriveného) priestoru, zakrivený konečne veľký trojrozmerný priestor vyvoláva otázku existencie nejakého viacrozmerného, neohraničeného a nezakriveného priestoru.

My sa však na tomto mieste nemienime zaoberať otázkou konečnosti či nekonečnosti priestoru, či už smerom k čoraz väčším alebo čoraz menším vzdialenostiam. Svoju pozornosť upriamime na omnoho tvrdšiu hranicu priestoru, ktorú predstavuje jeho trojrozmernosť. Na túto hranicu narazíme, keď sa pokúsime uskutočniť štyri rôzne, navzájom kolmé úsečky, vychádzajúce z jedného bodu. Priestor nám také niečo nedovolí. Pritom existencia takýchto úsečiek nevedie nevyhnutne k sporu, ich uskutočneniu nebránia nijaké logické zákony, ale len a len priestor. Aby sme si uvedomili rozdiel medzi priestorovou nepredstaviteľnosťou a logickou nemožnosťou, pokúsme sa vmyslieť do postavenia akýchsi plochých bytostí, obývajúcich dvojrozmerný priestor, t. j. rovinu. V rovine možno uskutočniť len dve rôzne navzájom kolmé úsečky vychádzajúce z daného bodu. Naši „dvojrozmerní ľudkovia“ by si zrejme nevedeli predstaviť tri takéto úsečky, čo pre nás nepredstavuje nijaký problém. Podobne nejaké bytosti, obývajúce n-rozmerný priestor, kde $n \geq 3$, by si asi vedeli predstaviť n navzájom kolmých úsečiek. Teda ich existencia je *logicky možná.*

Vráťme sa však k pôvodnej otázke: ako sa prejavuje trojrozmernosť nášho priestoru v matematickej podobe niektorých fyzikálnych zákonov a akú „fyziku“ by asi objavili „fyzici“ v n-rozmernom priestore.

Samozrejme, nebudeme sa zaoberať uvedenými otázkami v celej ich šírke, len sa pokúsime ilustrovať naznačenú problematiku na príklade Newtonovho gravitačného zákona. Úplne analogicky by sme mohli postupovať i v prípade Coulombovho zákona pre elektrostatickú silu.

Podľa Newtonovho gravitačného zákona centrálne symetrické teleso o hmotnosti M vytvára okolo seba centrálne symetrické gravitačné pole, ktoré na hmotný bod o hmotnosti m vo vzdialenosti r od stredu telesa pôsobí silou

$$F = \varkappa \frac{mM}{r^2},$$

kde $\varkappa$ je gravitačná konštanta, ktorej hodnotu možno stanoviť experimentálne. Gravitačná hmotnosť je priamo definovaná ako miera gravitačného účinku telesa, čo vyjadruje priama úmernosť uvedenej sily hmotnostiam oboch telies. Z centrálnej symetrie gravitačného poľa, ktorá je dôsledkom izotropie (homogenity) priestoru, vyplýva, že uvedená sila závisí len od vzájomnej vzdialenosti oboch telies a nie od ďalších parametrov ich vzájomnej polohy, napr. od smeru. Navyše je rozumné predpokladať, že gravitačná sila bude slabnúť so vzdialenosťou r. Na prvý pohľad však nie je jasné, prečo by mala slabnúť akurát nepriamo úmerne jej druhej mocnine. Ukážeme si, že práve to je dôsledkom trojrozmernosti priestoru. Rovnako oprávnene však možno tvrdiť, že trojrozmernosť priestoru je dôsledkom príslušnej podoby v ňom platného gravitačného zákona.

Gravitačné pole si znázorňujeme geometricky pomocou kriviek nazývaných *siločiary*. Tie majú v prípade centrálne symetrického poľa v izotropnom priestore tvar polpriamok vychádzajúcich zo stredu zdroja. Veľkosť príťažlivej sily pôsobiacej na hmotný bod je (okrem jeho hmotnosti) priamo úmerná hustote týchto siločiar v danom mieste. Keďže na povrchu guľovej plochy s polomerom r, opísanej okolo stredu príťažlivosti je hustota siločiar všade rovnaká, táto hustota klesá so vzdialenosťou r nepriamo úmerne plošnému obsahu povrchu danej guľovej plochy. Tento obsah má hodnotu $4\pi r^2$. To znamená, že veľkosť príťažlivej sily F je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti r.

Pod $(n-1)$-rozmernou sférou rozumieme povrch n-rozmernej guľovej plochy v n-rozmernom priestore. Ak si jej stred zvolíme za počiatok súradnej sústavy, tak $(n-1)$-rozmernú sféru s polomerom r možno stotožniť s množinou

$$S^{(n-1)}(r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\, x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}.$$

Veľkosť $(n-1)$-rozmerného povrchu sféry $S^{(n-1)}(r)$ je priamo úmerná mocnine r^{n-1}. Rovnakou úvahou ako v predchádzajúcom odstavci tak možno odvodiť nasledujúci tvar Newtonovho gravitačného zákona v n-rozmernom priestore:

$$F = \varkappa_n \frac{mM}{r^{n-1}},$$

kde $\varkappa_n$ je gravitačná konštanta, M je hmotnosť centrálne symetrického telesa vytvárajúceho príslušné gravitačné pole, m je hmotnosť hmotného bodu a r jeho vzdialenosť od stredu príťažlivosti. Špeciálne si uvedomme, že v jednorozmernom priestore, t. j. na priamke, gravitačná sila nezávisí na vzdialenosti (siločiary sa nemajú kam rozptýliť, ich hustota sa so vzdialenosťou nemení).

Práca, ktorú je potrebné vynaložiť na premiestnenie hmotného bodu s hmotnosťou m zo vzdialenosti $r_1 > 0$ do vzdialenosti $r_2 > r_1$ od stredu príťažlivosti, je daná integrálom

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F \,\mathrm{d}r = \varkappa_n mM \int_{r_1}^{r_2} r^{1-n} \,\mathrm{d}r.$$

Pre jednotlivé hodnoty n dostávame

$$\begin{aligned}
A &= \varkappa_1 mM(r_2 - r_1), && \text{ak } n = 1,\\
A &= \varkappa_2 mM \ln \frac{r_2}{r_1}, && \text{ak } n = 2,\\
A &= \varkappa_n \frac{mM}{n-2}\left(\frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}}\right), && \text{ak } n \geq 3.
\end{aligned}$$

Ďalšou analýzou uvedených vzťahov (čo už nebudeme robiť) možno zistiť, že pohyb v jedno- a dvojrozmernom priestore, t. j. na priamke a v rovine, by bol nesmierne energeticky náročný. Vymaniť sa z gravitačného poľa daného telesa ($r_2 \to \infty$) by si vyžiadalo nekonečne veľkú energiu. Navyše v rovine je v takomto poli možný len pohyb po kruhových uzavretých orbitách, alebo po neuzavretých orbitách (tvaru ružice), pričom oba typy sú stabilné. Uzavretá dráha prechádzajúca v rôznych vzdialenostiach od stredu príťažlivosti nie je možná. (Prípadom $n = 1$ sa ani nemusíme zaoberať, lebo na priamke jednoducho „nie je dosť miesta“ na pohyb bodu po uzavretej orbite „okolo“ iného bodu – zrážka by bola nevyhnutná.) Gravitačné pôsobenie v n-rozmernom priestore je pre $n \geq 4$ zasa ďaleko od zdroja také slabé a blízko zdroja také silné, že iné uzavreté orbity ako kruhové nie sú možné, a i tie sú nestabilné. Aj tá najmenšia odchýlka od kruhovej dráhy (zapríčinená napr. pôsobením ďalších planét) by spôsobila zmenu kruhovej dráhy na špirálovú (napr. únik Zeme od Slnka alebo pád naň). Nestabilita pre $n = 4$ má špeciálny charakter: za veľmi idealizovaných predpokladov si možno predstaviť prechod z jednej kruhovej orbity na inú v dôsledku dvoch presne zladených „drgnutí“ v opačných smeroch (po ktorých sa zachová energia a moment hybnosti). No každopádne, stabilné kruhové orbity sú možné len v dimenziách 2 a 3 a stabilné eliptické orbity len v dimenzii 3.

K podobným efektom by dochádzalo pôsobením elektrostatickej sily, pod vplyvom ktorej sa elektróny pohybujú okolo jadra atómu. Dvojrozmerný atóm by bol natoľko stabilný, že by sa vôbec nemohol ionizovať, teda v dvojrozmernom priestore by vôbec nemohlo dochádzať ku vzniku chemických zlúčenín. Vo viac než trojrozmernom priestore by zas nemohli existovať stabilné atómy – pri najmenšej odchýlke by elektrón po špirálovej dráhe z atómu unikol alebo spadol na jadro. Jemnejšia analýza kvantovomechanických javov ukazuje, že pre $n \geq 5$ – aj bez pôsobenia vyvolávajúceho malú odchýlku – by elektróny v obale atómu samovoľne prechádzali na čoraz vzdialenejšie orbity, teda atóm vo viac než štvorrozmernom priestore by sa spontánne ionizoval. Prípad $n = 4$ je opäť singulárny: moment hybnosti obiehajúceho elektrónu by mohol nadobúdať len jedinú pevne stanovenú hodnotu.

Pokiaľ teda uznáme oprávnenosť vykonanej extrapolácie fyzikálnych zákonov trojrozmerného sveta aj na svety iných rozmerov (čo je zrejme najproblematickejšie miesto našich úvah), dochádzame k záveru, že tak stabilné sýstémy planét obiehajúcich okolo centrálnych hviezd ako aj stabilné a jednako zlučovania schopné atómy pozostávajúce z jadra a elektrónového obalu sú možné len v trojrozmernom priestore.