10. DETERMINANTY

V tejto kapitole zavedieme *determinanty* štvorcových matíc ľubovoľného rozmeru $n\times n$ nad pevným poľom K, preskúmame ich základné vlastnosti a naučíme sa ich počítať. Taktiež si ukážeme niekoľko príkladov ich využitia.

Čitateľ sa pravdepodobne už na strednej škole stretol s determinantmi reálnych matíc rozmerov 2×2 a 3×3. Možno tiež vie previesť výpočet determinantov vyšších rádov na výpočet determinantov nižších rádov pomocou ich rozvoja podľa nejakého riadku alebo stĺpca. So všeobecnou definíciou determinantu sa však asi dosiaľ nestretol. Ako čoskoro uvidíme, nie je to nijako priezračná definícia a na prvý pohľad určite nepôsobí „prirodzeným“ dojmom. Keďže nechceme, aby táto definícia „spadla z neba“, náš výklad začneme pomerne dlhým úvodom, ktorý má poslúžiť ako jej motivácia.

10.1. Orientovaný objem a multilinérne alternujúce funkcie

Na začiatok si položme prirodzenú otázku: Ako vyzerajú vzorce pre plošný obsah rovnobežníka v rovine v $\mathbb{R}^2$, ktorého dve susedné strany tvoria vektory $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^T$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)^T$, resp. pre objem rovnobežnostena v priestore $\mathbb{R}^3$, ktorého tri susedné hrany tvoria vektory $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)^T$, $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3)^T$?

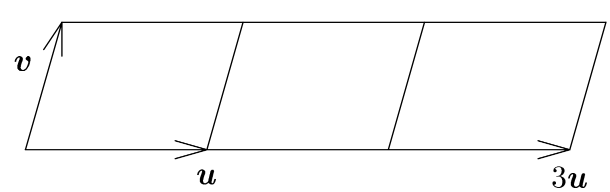
Vzorce, ktoré by vyjadrovali príslušný obsah alebo objem len pomocou súradníc vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ resp. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, asi len tak z rukáva nevysypeme, môžeme sa však pokúsiť ich odvodiť. Najschodnejšia cesta vedie cez ujasnenie si vlastností, ktorým by mali takéto vzorce vyhovovať. Uvidíme, že tieto vlastnosti už jednoznačne (až na voľbu jednotkového obsahu či objemu) určujú hľadané vzorce nielen v rovine či v trojrozmernom priestore, ale možno ich bezprostredne zovšeobecniť na n-rozmerné vektorové priestory K^n nad ľubovoľným poľom K, hoci tu pojem „n-rozmerného objemu“ stráca svoj názorný geometrický význam.

Označme teda $P(X)$ obsah rovinného útvaru X. Zrejme $P(X)$ je vždy nezáporné reálne číslo a pre zhodné útvary X, Y platí $P(X)=P(Y)$. Obsah je navyše *aditívny*, t. j. pre útvary X, Y také, že $P(X\cap Y)=0$, platí $P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)$. Konečne, $P(X)=0$ pre ľubovoľnú úsečku X.

Obsah rovnobežníka $\{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v};\ a,b\in\langle 0,1\rangle\}$ určeného vektormi $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ budeme značiť $P(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. Z práve sformulovaných vlastností obsahu vyplývajú rovnosti

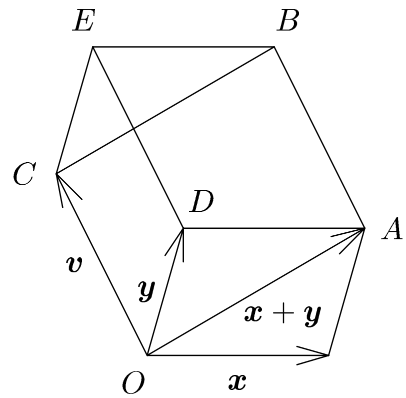
$$P(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=P(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),\qquad P(c\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=|c|P(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

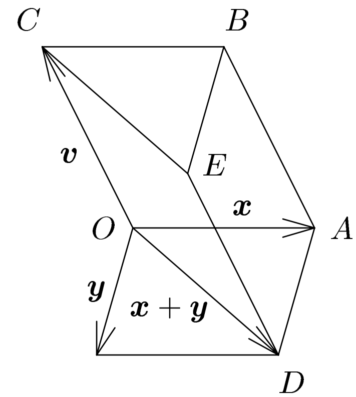
pre ľubovoľné $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$, $c\in\mathbb{Z}$. Situácia pre $c=3$ je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Platnosť druhej rovnosti pre všetky $c \in \mathbb{Q}$ možno už z toho jednoducho dokázať (skúste sami). S jej platnosťou pre všetky $c \in \mathbb{R}$ je to už trochu zložitejšie – zakladá sa na istých úvah o „spojitosti" obsahu –, a tak jej radšej uveríme bez dôkazu.

Pozrime sa teraz na ďalšie dva obrázky. (Podotýkame, že oba znázorňujú situáciu *v rovine*, teda pri pohľade na ne treba potlačiť priestorové videnie, ktoré sa nám mimovoľne otvára.)





V prvom prípade určujú vektory $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ rovnobežník $OABC$, vektory $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ rovnobežník $ODEC$ a rovnobežník vektorov $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ je zhodný s rovnobežníkom $DABE$. Zo zhodnosti trojuholníkov OAD, CBE potom na základe uvedených vlastností obsahu vyplýva rovnosť

$$P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}) = P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) + P(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}).$$

V druhom prípade určujú vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ rovnobežník $OABC$, vektory $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ rovnobežník $ODEC$ a rovnobežník vektorov $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ je zhodný s rovnobežníkom $DABE$. Zo zhodnosti trojuholníkov ODA, CEB vyplýva $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}) + P(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})$, teda

$$P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}) = P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \Leftrightarrow P(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}).$$

To je v porovnaní s prvým prípadom nepríjemné prekvapenie, určite by sme dali prednosť rovnakej formule. Všimnime si však , že „kratšie otočenie" vektora $\boldsymbol{y}$ do vektora $\boldsymbol{v}$ je orientované proti „kratším otočeniam" vektorov $\boldsymbol{x}$ aj $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ do vektora $\boldsymbol{v}$. V druhom prípade by sa nám preto hodilo, aby „obsah" rovnobežníka určeného vektormi $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ mal z toho dôvodu opačné znamienko ako obsahy rovnobežníkov prislúchajúcich vektorom $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ resp. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$. Tento cieľ možno dosiahnuť, ak namiesto plošného obsahu vektorových rovnobežníkov budeme uvažovať ich *orientovaný plošný obsah*, ktorý mení znamienko zámenou poradia dvoch vektorov, teda môže nadobúdať aj záporné hodnoty. Pôvodný nezáporný plošný obsah potom dostaneme ako absolútnu hodnotu orientovaného obsahu. Tento prístup nám navyše umožní zbaviť sa absolútnej hodnoty v rovnosti $P(c\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = |c|P(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

Podobnými úvahami, ktoré by si však vyžiadali trochu zložitejšie obrázky, tentokrát znázorňujúce naozaj priestorové situácie, by sme mohli dospieť i k potrebe skúmať *orientovaný objem* rovnobežnostena $\{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w};\ a,b,c \in \langle 0,1\rangle\}$ určeného vektormi $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ v trojrozmernom priestore $\mathbb{R}^3$, prípadne *orientovaný n-rozmerný objem* rovnobežnostena $\{a_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+a_n\boldsymbol{u}_n;\ a_1,\ldots,a_n \in \langle 0,1\rangle\}$ určeného vektormi

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ v n-rozmernom priestore $\mathbb{R}^n$ (pre $n > 3$ však bez možnosti sprostredkovať si geometrický vhľad obrázkami).

Pre čitateľa, ktorý sa už stretol s *vektorovým súčinom* v $\mathbb{R}^3$, poznamenajme, že orientovaný n-rozmerný objem sa správa do značnej miery podobne. Vektorový súčin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ dvoch vektorov $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, je vektor kolmý na rovinu $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, ktorého dlžka sa rovná plošnému obsahu rovnobežníka vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a orientácia je daná pravidlom pravej ruky (ak položíme dlaň pravej ruky malíčkom na vektor $\boldsymbol{u}$ tak, že zakrivené prsty smerujú k vektoru $\boldsymbol{v}$ po oblúku zodpovedajúcom uhlu $\leq 180°$, vztýčený palec ukazuje smer aj orientáciu vektora $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$). Z toho dôvodu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$.

Ak nahradíme reálne čísla ľubovoľným poľom K, vykonané úvahy nás privádzajú k nasledujúcim definíciám. Nech V je vektorový priestor nad poľom K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že zobrazenie $F\colon V^n \to K$ je

(a) *n-lineárne* alebo tiež *multilineárne*, ak pre každé $1 \leq j \leq n$ a ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \boldsymbol{u}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ priradenie

$$\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

definuje lineárne zobrazenie $V \to K$, t. j. pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $a, b \in K$ platí

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \\ &\quad = aF(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n) + bF(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n); \end{aligned}$$

(b) *antisymetrické* alebo tiež *alternujúce*, ak pre všetky $1 \leq i < j \leq n$ a ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ platí

$$F(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i, \ldots, \boldsymbol{u}_j, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = -F(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_j, \ldots, \boldsymbol{u}_i, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

Inak povedané, $F\colon V^n \to K$ je n-lineárne, ak dosadením ľubovoľných $n-1$ pevných vektorov na akékoľvek miesta do F dostaneme lineárne zobrazenie v zvyšnej voľnej premennej; F je antisymetrické, ak zámenou poradia ľubovoľných dvoch argumentov v F sa hodnota výsledku zmení na opačnú.

Cieľom našich úvah teda bolo čitateľa presvedčiť, že n-rozmerný orientovaný objem v $\mathbb{R}^n$ je multilineárna alternujúca funkcia

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-krát}} \to \mathbb{R}.$$

Ďalej budeme využívať nasledujúce vlastnosti alternujúcich, resp. alternujúcich multilineárnych zobrazení. Pripomeňme, že pole K má charakteristiku 2, ak v ňom platí $1+1=0$ čo je ekvivalentné s podmienkou $(\forall\, a \in K)(a = -a)$. Príkladom takého poľa je $\mathbb{Z}_2$ (pozri paragraf 1.2). Ak $\operatorname{char} K \neq 2$, tak $(\forall\, a \in K)(a = -a \Rightarrow a = 0)$.

10.1.1. Lema. *Nech $F\colon V^n \to K$ je alternujúca funkcia, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ a σ je ľubovoľné zobrazenie množiny $\{1, \ldots, n\}$ do seba.*

(a) ak σ je permutácia, tak $F(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$;

(b) ak σ nie je permutácia a $\operatorname{char} K \neq 2$, *tak $F(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)}) = 0$.*

Dôkaz. (a) Stačí si uvedomiť, že $|\sigma|$ označuje najmenší počet traspozícií (t. j. výmien poradia dvojíc), z ktorých možno zložiť permutáciu σ (pozri paragraf 0.5).

(b) Ak σ nie je permutácia, tak $\sigma(i) = \sigma(j)$, preto tiež $\boldsymbol{u}_{\sigma(i)} = \boldsymbol{u}_{\sigma(j)}$, pre nejaké $1 \leq i < j \leq n$. Označme $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_{\sigma(k)}$ pre $1 \leq k \leq n$. Potom $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ a

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) &= F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\ &= -F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \end{aligned}$$

čo má v poli charakteristiky $\neq 2$ za následok $F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0$.

10.1.2. Lema. *Nech* char $K \neq 2$ *a* $F\colon V^n \to K$ *je multilineárna alternujúca funkcia. Potom pre ľubovoľné* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ *platí:*

(a) *Pripočítaním skalárneho násobku nejakého z vektorov k inému vektoru sa hodnota* $F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *nezmení, t.j. pre ľubovoľné* $c \in K$ *a* $i, j \leq n$ *platí*

$$F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j + c\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

(b) *Ak sú vektory* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *lineárne závislé, tak* $F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0$.

Dôkaz. (a) Priamym výpočtom s použitím multilinearity a lemy 10.1.1 dostávame

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j + c\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\ &\qquad = F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + cF(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\ &\qquad = F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \end{aligned}$$

(b) Ak sú vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárne závislé, tak niektorý z nich, povedzme $\boldsymbol{v}_k$, je lineárnou kombináciou ostatných, teda $\boldsymbol{v}_k = \sum_{i \neq k} c_i \boldsymbol{v}_i$ pre vhodné skaláry c_i. Z multilinearity F a z lemy 10.1.1 potom vyplýva

$$F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \sum_{i \neq k} c_i F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0,$$

lebo v každom z uvedených výrazov $F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ sa vektor $\boldsymbol{v}_i$ vyskytuje ako argument na i-tom aj na k-tom mieste.

Pozrime sa teraz bližšie, ako vyzerajú všetky bilineárne (t. j. 2-lineárne) alternujúce funkcie $F\colon K^2 \times K^2 \to K^2$ nad poľom K charakteristiky $\neq 2$. Zvoľme ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2$ z K^2. Ak dvakrát po sebe využijeme bilinearitu a na záver antisymetriu F, postupne dostaneme

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= F(u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{v}) = u_1F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}) + u_2F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}) \\ &= u_1F(\boldsymbol{e}_1,\ v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2) + u_2F(\boldsymbol{e}_2,\ v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= u_1v_1F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + u_1v_2F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + u_2v_1F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + u_2v_2F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \\ &= F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)(u_1v_2 - u_2v_1) = F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kde výraz

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$$

čitateľ už iste pozná ako determinant matice $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$.

Podobným spôsobom možno odvodiť aj tvar ľubovoľnej n-lineárnej alternujúcej funkcie $F\colon K^{n\times n} \to K$ (i teraz, ako obyčajne, prirodzene stotožňujeme n-tú karteziánsku mocninu $(K^n)^n$ stĺpcového vektorového priestoru $V = K^n$ s priestorom matíc $K^{n\times n}$). Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ je matica so stĺpcami

$$\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A}) = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i.$$

S využitím n-linearity F pre každý z n stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ možno výraz $F(\boldsymbol{A})$ postupne roznásobiť, čím dostaneme súčet n^n členov tvaru

$$a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}),$$

z ktorých každý zodpovedá jednému zobrazeniu σ množiny $\{1, \ldots, n\}$ do seba. Podľa lemy 10.1.1 sčítance prislúchajúce zobrazeniam $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ sú všetky rovné 0 a pre $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n).$$

Záverom tak dostávame

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{A}) &= F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\ &= F(\boldsymbol{I}_n) \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}, \end{aligned}$$

kde príslušná suma obsahuje $n!$ sčítancov, jeden pre každú permutáciu $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Ak by sme chceli výsledky 10.1.1(b) a 10.1.2, ako aj uvedený tvar zobrazenia F odvodiť aj pre polia charakteristiky 2, museli by sme k podmienkam multilineárnosti a antisymetrie zobrazenia $F\colon V^n \to K$ pripojiť ešte tretiu, pre orientovaný objem z geometrického názoru ľahko odôvodniteľnú podmienku: ak sa niektoré dva z vektorov $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ rovnajú, tak $F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0$. Takéto zobrazenia budeme výlučne pre potreby niekoľkých cvičení tejto kapitoly nazývať *anulujúcimi*. Pre polia charakteristiky $\neq 2$ je táto podmienka bezprostredným dôsledkom antisymetrie; v cvičeniach sa však stretneme s príkladom, že v poliach charakteristiky 2 to tak byť nemusí. Na druhej strane, každé *multilineárne* anulujúce zobrazenie $F\colon V^n \to K$, nad *ľubovoľným* poľom K je už nevyhnutne alternujúce (skúste si dokázať sami).

Aby sme sa zbytočne nerozptyľovali nepodstatnými podrobnosťami, budeme odteraz v celej kapitole mlčky predpokladať, že char $K \neq 2$. Podotýkame však, že všetky ďalej uvedené výsledky platia aj pre polia charakteristiky 2, len niektoré ich dôkazy si v tomto prípade vyžadujú isté úpravy. Zvedavý čitateľ ich nájde v cvičeniach.

10.2. Definícia a základné vlastnosti determinantu

Determinantom štvorcovej matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ nazývame výraz

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\Leftrightarrow 1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Ak nehrozí zámena s absolútnou hodnotou, používame tiež označenie $|\boldsymbol{A}|$. Determinant štvorcovej matice rádu n budeme nazývať *determinant rádu n*.

Špeciálne pre maticu $(a_{ij}) \in K^{3 \times 3}$ dostávame vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$\Leftrightarrow a_{31}a_{22}a_{13} \Leftrightarrow a_{21}a_{12}a_{33} \Leftrightarrow a_{11}a_{32}a_{23},$$

známy ako *Sarrusovo pravidlo.*

Nasledujúce dve vlastnosti determinantov dokážeme ako dôsledky našej definície.

10.2.1. Tvrdenie. *Determinant transponovanej matice sa rovná determinantu pôvodnej matice, t.j.*

$$\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A}$$

pre ľubovoľnú $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$.

Dôkaz. Podľa definícií transponovanej matice a determinantu

$$\det \boldsymbol{A}^T = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Keďže pre $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí $i = \sigma(j) \Leftrightarrow j = \sigma^{-1}(i)$, zoradením činiteľov v súčine $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ podľa druhého indexu tento nadobudne tvar $a_{\sigma^{-1}(1)\,1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)\,n}$. Pritom priradenie $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ je bijekcia $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$. Navyše, ak $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ je rozklad permutácie σ na transpozície, tak σ^{-1} je kompozícia tých istých transpozícií v opačnom poradí, preto $|\sigma| = \left|\sigma^{-1}\right|$. V dôsledku toho zámenou sumácie cez $\sigma \in \mathcal{S}_n$ za sumáciu cez $\sigma^{-1} = \varrho \in \mathcal{S}_n$ dostávame

$$\det \boldsymbol{A}^T = \sum_{\varrho\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\varrho|} a_{\varrho(1)\,1} \dots a_{\varrho(n)\,n} = \det \boldsymbol{A}.$$

Vďaka práve dokázanému tvrdeniu si všetky výsledky o determinantoch matíc zachovajú svoju platnosť, ak v nich každý výskyt slova „stĺpec“ nahradíme slovom „riadok“ a naopak. Tento princíp zámeny riadkov a stĺpcov budeme často využívať.

10.2.2. Tvrdenie. *Nech* $1 \le m < n$ *a* $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ *je bloková matica tvaru*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{B} \in K^{m\times m}$, $\boldsymbol{C} \in K^{m\times(n-m)}$ *a* $\boldsymbol{D} \in K^{(n-m)\times(n-m)}$. *Potom*

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} \cdot \det \boldsymbol{D}.$$

Dôkaz. Z uvedeného blokového tvaru matice $\boldsymbol{A}$ vyplýva

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{ak } 1 \le i,j \le m, \\ c_{i\,j-m}, & \text{ak } 1 \le i \le m < j \le n, \\ 0, & \text{ak } 1 \le j \le m < i \le n, \\ d_{i-m\,j-m}, & \text{ak } m < i,j \le n. \end{cases}$$

Označme $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_n; (\forall\, j \le m)(\sigma(j) \le m)\}$. Potom pre $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus G$ platí $a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n} = 0$, teda do hodnoty determinantu matice $\boldsymbol{A}$ prispievajú len sčítance zodpovedajúce permutáciám $\sigma \in G$. Navyše, $(\forall\, \sigma \in G)(m < j \Rightarrow m < \sigma(j))$, takže pre $\sigma \in G$ možno definovať permutácie $\sigma' \in \mathcal{S}_m$ a $\sigma'' \in \mathcal{S}_{n-m}$ predpismi $\sigma'(j) = \sigma(j)$, ak $1 \le j \le m$, resp. $\sigma''(k) = \sigma(k+m) - m$, ak $1 \le k \le n - m$. Zrejme priradením $\sigma \mapsto (\sigma', \sigma'')$ je daná bijekcia $G \to \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ a platí $|\sigma| = |\sigma'| + |\sigma''|$. Takže môžeme písať

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \sum_{\sigma \in G} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(m)\,m} a_{\sigma(m+1)\,m+1} \dots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \sum_{\sigma \in G} (-1)^{|\sigma'|+|\sigma''|} b_{\sigma'(1)\,1} \dots b_{\sigma'(m)\,m} d_{\sigma''(1)\,1} \dots d_{\sigma''(n-m)\,n-m} \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_m} (-1)^{|\sigma'|} b_{\sigma'(1)\,1} \dots b_{\sigma'(m)\,m} \sum_{\sigma'' \in \mathcal{S}_{n-m}} (-1)^{|\sigma''|} d_{\sigma''(1)\,1} \dots d_{\sigma''(n-m)\,n-m} \\
&= \det \boldsymbol{B} \cdot \det \boldsymbol{D}.
\end{aligned}$$

Na základe tvrdenia 10.2.1 teraz vieme, že $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} \cdot \det \boldsymbol{D}$, aj keď sa nulový blok $\mathbf{0}$ nachádza nad a blok $\boldsymbol{C} \in K^{(n-m)\times m}$ pod diagonálou matice $\boldsymbol{A}$. Tvrdenie 10.2.2 možno taktiež zrejmým spôsobom zovšeobecniť na matice pozostávajúce z viacerých diagonálne zoradených štvorcových blokov, pod (nad) ktorými sú samé nuly. Spomeňme explicitne nasledujúce dva prípady:

(1) Ak $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k$ sú štvorcové matice, tak

$$\det \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_k) = \det \boldsymbol{A}_1 \cdot \ldots \cdot \det \boldsymbol{A}_k.$$

(2) Matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ sa nazýva *horná (dolná) trojuholíková matica*, ak $a_{ij} = 0$ pre $i < j$ (resp. pre $i > j$). Pre horné aj dolné trojuholníkové matice platí

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11} \dots a_{nn},$$

t. j. determinant takej matice je súčinom jej diagonálnych prvkov. Špeciálne to platí pre diagonálne matice.

10.3. Charakterizácia determinantu a regulárnych matíc

Úvahy z paragrafu 10.1 možno zhrnúť do nasledujúcej vety.

10.3.1. Veta. *Determinant rádu n je n-lineárna alternujúca funkcia $K^{n\times n} \to K$ stĺpcov matice. Navyše, pre každý skalár $c \in K$ existuje jediné multilineárne alternujúce zobrazenie $F\colon K^{n\times n} \to K$ stĺpcov matice také, že $F(\boldsymbol{I}_n) = c$. Toto F je dané predpisom*

$$F(\boldsymbol{A}) = c \det \boldsymbol{A}.$$

Determinant $\det\colon K^{n\times n} \to K$ je teda jednoznačne určený ako n-lineárna alternujúca funkcia stĺpcov matice taká, že

$$\det \boldsymbol{I}_n = \det(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = 1.$$

Táto rovnosť zodpovedá prirodzenej voľbe jednotky orientovaného n-rozmerného objemu v K^n – je ňou orientovaný objem rovnobežnostena určeného vektormi $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ (v tomto poradí).

V paragrafe 10.1 sme vlastne dokázali, že každá n-lineárna alternujúca funkcia $F\colon K^{n\times n} \to K$ musí mať uvedený tvar, t. j. je skalárnym násobkom determinantu.

Zostáva však overiť, že determinant, tak, ako sme ho definovali, je naozaj multilineárne antisymetrické zobrazenie. Hoci tieto vlastnosti sú intutívne jasné z našej konštrukcie, pre ambicióznejšieho čitateľa podáme ich dôkaz vychádzajúci len z definície determinantu. Navyše sa tým náš výklad stane formálne nezávislým na motivačných úvahách o orientovanom objeme z prvej časti úvodného paragrafu 10.1.

Dôkaz vety 10.3.1 odložíme až do nasledujúceho paragrafu, kde nám poslúži ako vhodný úvod do ďalšieho okruhu otázok. Na tomto mieste však zaznamenáme dva bezprostredné dôsledky tejto charakterizačnej vety. Samozrejme, v jej dôkaze sa na ne nebudeme odvolávať.

10.3.2. Veta. *(Cauchy) Pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ platí*

$$\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B};$$

t. j. determinant súčinu matíc sa rovná súčinu ich determinantov.

Dôkaz. Zvoľme pevne maticu $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ a definujme zobrazenie $F\colon K^{n\times n} \to K$ predpisom $F(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ pre $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Overíme, že F je n-lineárne antisymetrické zobrazenie stĺpcov matice $\boldsymbol{B}$; označme ich $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$.

Najprv overíme antisymetriu F. Nech $1 \le i < j \le n$ a $\boldsymbol{B}'$ je matica, ktorá vznikne zámenou i-teho a j-teho stĺpca matice $\boldsymbol{B}$. S využitím antisymetrie determinantu dostávame

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{v}_n))\\
&= \det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_n)\\
&= \Leftrightarrow\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_n)\\
&= \Leftrightarrow\det(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_j,\dots,\boldsymbol{v}_i,\dots,\boldsymbol{v}_n)) = \Leftrightarrow F(\boldsymbol{B}').
\end{aligned}$$

Teraz dokážeme multilinearitu F. Zafixujme stĺpce $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{j-1},\boldsymbol{v}_{j+1},\dots,\boldsymbol{v}_n$ a na miesto j-teho stĺpca dosaďme vektor $a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}$. S využitím n-linearity F nám vyjde

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{v}_1,\dots,a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y},\dots,\boldsymbol{v}_n) &= \det(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{v}_1,\dots,a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y},\dots,\boldsymbol{v}_n))\\
&= \det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{A}\cdot(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}),\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_n))\\
&= \det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_1,\dots,a(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y}),\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_n))\\
&= a\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x},\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_n)\\
&\qquad + b\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y},\dots,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_n)\\
&= a\det(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{x},\dots,\boldsymbol{v}_n))\\
&\qquad + b\det(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{y},\dots,\boldsymbol{v}_n))\\
&= aF(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{x},\dots,\boldsymbol{v}_n) + bF(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{y},\dots,\boldsymbol{v}_n).
\end{aligned}$$

Podľa vety 10.3.1 má F tvar $F(\boldsymbol{B}) = c\det\boldsymbol{B}$ pre jednoznačne určený skalár $c = F(\boldsymbol{I}_n) = \det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_n) = \det\boldsymbol{A}$.

10.3.3. Veta. *Štvorcová matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je regulárna práve vtedy, keď* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. *V tom prípade*

$$\det\bigl(\boldsymbol{A}^{-1}\bigr) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}.$$

Dôkaz. Ak $\boldsymbol{A}$ je singulárna, tak jej stĺpce sú lineárne závislé. Podľa lemy 10.1.2 (b) je $F(\boldsymbol{A}) = 0$ pre ľubovoľnú n-lineárnu alternujúcu funkciu $F\colon K^{n\times n} \to K$. Teda špeciálne $\det \boldsymbol{A} = 0$. Naopak, nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna. Potom podľa vety 10.3.2,

$$\det \boldsymbol{A} \cdot \det\bigl(\boldsymbol{A}^{-1}\bigr) = \det\bigl(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\bigr) = \det \boldsymbol{I}_n = 1.$$

Preto $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ a $\det\bigl(\boldsymbol{A}^{-1}\bigr) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

10.4. Laplaceov rozvoj determinantu

Náš výklad začneme sľúbeným dôkazom. Keďže pre $n = 1$ niet čo dokazovať, aby sme sa vyhli rozpitvávaniu trivialít, budeme v celom paragrafe predopkladať, že $n \geq 2$.

Dôkaz vety 10.3.1. Najprv dokážeme antisymetriu determinantu. Zrejme stačí overiť, že pre ľubovoľné $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $\tau \in \mathcal{S}_n$ platí

$$\det(\boldsymbol{s}_{\tau(1)}(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_{\tau(n)}(\boldsymbol{A})) = (-1)^{|\tau|} \det \boldsymbol{A}.$$

Podľa definície determinantu

$$\det(\boldsymbol{s}_{\tau(1)}(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_{\tau(n)}(\boldsymbol{A})) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,\tau(1)} \dots a_{\sigma(n)\,\tau(n)}.$$

Keďže pre ľubovoľné $i, j \leq n$ platí $i = \tau(j) \ \Leftrightarrow\ \tau^{-1}(i) = j$ a v tom prípade tiež $\sigma(j) = (\sigma\circ\tau^{-1})(i)$, zoradením činiteľov v súčine $a_{\sigma(1)\,\tau(1)} \dots a_{\sigma(n)\,\tau(n)}$ podľa druhého indexu tento nadobudne tvar $a_{(\sigma\circ\tau^{-1})(1)\,1} \dots a_{(\sigma\circ\tau^{-1})(n)\,n}$. Priradenie $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau^{-1}$ je bijekcia $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$, z toho dôvodu zámenou sumácie cez $\sigma \in \mathcal{S}_n$ za sumáciu cez $\sigma\circ\tau^{-1} = \varrho \in \mathcal{S}_n$ dostávame

$$\det(\boldsymbol{s}_{\tau(1)}(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_{\tau(n)}(\boldsymbol{A})) = \sum_{\varrho\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\varrho\circ\tau|} a_{\varrho(1)\,1} \dots a_{\varrho(n)\,n} = (-1)^{|\tau|} \det \boldsymbol{A}.$$

Teraz dokážeme, že $\det \boldsymbol{A}$ je lineárnou funkciou j-teho stĺpca $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$. Pre $i \leq n$ označme $\mathcal{S}_n(i,j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n;\ i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n(i,j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(j-1)\,j-1} a_{\sigma(j+1)\,j+1} \dots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Potom zrejme

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} a_{ij} = (\tilde{a}_{1j}, \dots, \tilde{a}_{nj}) \cdot (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T,$$

čo dokazuje spomínanú linearitu.

Na základe tvrdenia 10.2.1 platí aj „riadkova verzia“ práve dokázanej vety 10.3.1. Špeciálne, determinant je takisto multilineárna alternujúca funkcia riadkov matice a (keďže $\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j,i)$) pre i-ty riadok $(a_{i1},\dots,a_{in})$ matice $\boldsymbol{A}$ jej determinant má rozvoj

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} = (a_{i1},\dots,a_{in}) \cdot (\tilde{a}_{i1},\dots,\tilde{a}_{in})^T.$$

s rovnako definovanými koeficientmi $\tilde{a}_{ij}$.

Uvedený prvok $\tilde{a}_{ij}$ nazývame *algebraickým doplnkom* prvku a_{ij} v matici $\boldsymbol{A}$. Maticu $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ nazývame *maticou algebraických doplnkov* k matici $\boldsymbol{A}$.

10.4.1. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A}_{ij}$ označuje maticu rádu $n \Leftrightarrow 1$, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca. Potom*

$$\tilde{a}_{ij} = (\Leftrightarrow 1)^{i+j} |\boldsymbol{A}_{ij}|.$$

Dôkaz. Označme $\boldsymbol{B}$ maticu, ktorá vznikne nahradením j-teho stĺpca matice $\boldsymbol{A}$ stĺpcovým vektorom $\boldsymbol{e}_i \in K^n$. Zrejme $\tilde{a}_{ij} = |\boldsymbol{B}|$. Ak budeme v matici $\boldsymbol{B}$ postupne vymieňať stĺpce s indexmi j a $j+1$, ďalej $j+1$ a $j+2$, atď., až nakoniec $n \Leftrightarrow 1$ a n, a potom riadky s indexmi i a $i+1$, ďalej $i+1$ a $i+2$, atď., až napokon $n \Leftrightarrow 1$ a n, dostaneme maticu tvaru

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{ij} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b} & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{b}$ vznikne z i-teho riadku matice $\boldsymbol{A}$ vynechaním j-teho prvku a $\boldsymbol{0}$ je nulový stĺpec dĺžky $n \Leftrightarrow 1$. Podľa tvrdenia 10.2.2 (a poznámky za jeho dôkazom), determinant tejto matice je $|\boldsymbol{A}_{ij}|$. Keďže determinant je alternujúca funkcia tak stĺpcov ako aj riadkov matice a všetkých výmien bolo dohromady $(n \Leftrightarrow j) + (n \Leftrightarrow i) = 2n \Leftrightarrow (i+j)$, platí

$$\tilde{a}_{ij} = |\boldsymbol{B}| = (\Leftrightarrow 1)^{2n-(i+j)} |\boldsymbol{C}| = (\Leftrightarrow 1)^{i+j} |\boldsymbol{A}_{ij}|.$$

Determinanty matíc, ktoré vzniknú vynechaním niektorých riadkov a rovnakého počtu sĺtpcov z matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, nazývame jej *minormi*, prípadne *subdeterminantmi* determinantu $|\boldsymbol{A}|$. Dosadením získaných hodnôt algebraických doplnkov do rozvoja determinantu rádu n podľa niektorého riadku resp. stĺpca tak dostávame jeho vyjadrenie pomocou subdeterminantov rádu $n \Leftrightarrow 1$.

10.4.2. Veta. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $1 \le k, l \le n$. Potom*

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} (\Leftrightarrow 1)^{k+j} a_{kj}\, |\boldsymbol{A}_{kj}| = \sum_{i=1}^{n} (\Leftrightarrow 1)^{i+l} |\boldsymbol{A}_{il}|\, a_{il}.$$

Uvedené súčty nazývame *Laplaceovými rozvojmi* determinantu $|\boldsymbol{A}|$ – prvý podľa k-teho riadku, druhý podľa l-teho stĺpca.

10.5. Výpočet determinantu

Skôr než sa pustíme do výpočtov konkrétnych determinantov, skúsme si urobiť inventúru prostriedkov, ktoré máme nato k dispozícii, a posúdiť ich vhodnosť.

Asi sa zhodneme na tom, že výpočet determinantu rádu n podľa jeho definície, ako súčtu $n!$ súčinov po n činiteľoch, by bol značne ťažkopádny. Pokiaľ sme sa stretli len s prípadmi $n = 2$ alebo $n = 3$, nemusíme si to jasne uvedomiť. Avšak už $4! = 24$, $5! = 120$ a funkcia $n!$ veľmi rýchlo rastie. Preto je potrebné pouvažovať o nejakej inej metóde.

Keďže determinant je multilineárnou alternujúcou funkciou tak riadkov ako aj stĺpcov matice, ako najprirodzenejšia sa nám ponúka metóda úpravy matice na hornú prípadne dolnú trojuholníkovú maticu pomocou elementárnych riadkových i stĺpcových operácií. Ako sme už spomínali v poznámke (2) za dôkazom tvrdenia 10.2.2:

(0) Determinant trojuholníkovej matice sa rovná súčinu jej diagonálnych prvkov.

Pripomeňme si aj nasledujúce pravidlá z paragrafu 10.1 o vplyve ERO a ESO na determinant:

(1) Výmenou poradia dvoch riadkov alebo stĺpcov matice sa hodnota jej determinantu zmení na opačnú.
(2) Vynásobením nejakého riadku alebo stĺpca matice nenulovým skalárom $c \in K$ sa jej determinant zmení na c-násobok pôvodnej hodnoty.
(3) Pripočítaním skalárneho násobku nejakého riadku matice k jej inému riadku, resp. násobku nejakého jej stĺpca k inému stĺpcu sa hodnota jej determinantu nezmení.

Všimnite si, že len tretí typ menovaných úprav necháva determinant bezo zmeny! Poznamenajme, že úpravy typu (3) spolu s pravidlom (0) plne postačujú na výpočet akéhokoľvek determinantu. Bez pravidiel (1) a (2) sa možno kľudne zaobísť, občas nám však môžu pomôcť sprehľadniť situáciu, preto sa im nebudeme vyhýbať.

Často býva užitočné výslovne si uvedomiť nasledujúci dôsledok pravidiel (1) – (3):

(4) Ak matica obsahuje nulový riadok alebo stĺpec, prípadne dva rovnaké riadky alebo stĺpce, tak jej determinant je 0.

Mohlo by sa zdať, že sme akosi pozabudli na Laplaceov rozvoj. Táto metóda umožňuje previesť výpočet determinantu rádu n na výpočet n determinantov rádu $n \Leftrightarrow 1$, presnejšie na istú ich lineárnu kombináciu. Ak by sme dôsledne pokračovali ďalej, mohli by sme túto úlohu previesť na výpočet $n(n \Leftrightarrow 1)$ determinantov rádu $n \Leftrightarrow 2$, atď., až by sme napokon dostali $n!$ determinantov rádu 1. Ak si to dobre premyslíme, zistíme, že takýto výpočet by bol rovnako efektívny (či, lepšie povedané, neefektívny) ako výpočet determinantu priamo na základe jeho definície.

Jednako sa Laplaceovho rozvoja celkom nezriekame. Odporúčame ho však používať len vtedy, keď sú všetky prvky príslušného riadku či stĺpca, podľa ktorého determinant rozvíjame, až na jednu výnimku rovné nule. Vtedy vlastne nejde ani tak o rozvoj ako o zníženie rádu daného determinantu o 1 (bez nárastu počtu determinantov). Toto odporúčanie sformulujeme do nášho predposledného pravidla:

(5) Nech všetky prvky i-teho riadku prípadne j-teho stĺpca matice $\boldsymbol{A}$ s výnimkou prvku a_{ij} sú rovné 0. Potom

$$|\boldsymbol{A}| = (\Leftrightarrow 1)^{i+j} a_{ij} \, |\boldsymbol{A}_{ij}|.$$

Všimnite si, že pravidlo (0) možno dostať ako dôsledok ($n \Leftrightarrow 1$)-násobného použitia pravidla (5) a zrejmého faktu, že determinant matice (a) typu 1×1 je samotná hodnota a.

Ak si ešte uvedomíme, že determinanty rádu 2 možno najvýhodnejšie počítať priamo z definície:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \Leftrightarrow a_{21}a_{12}, \tag{6}$$

je to už naozaj všetko, čo potrebujeme vedieť na *efektívny* výpočet determinantu.

10.5.1. Príklad. Vypočítame determinant reálnej matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 3 & 8 & 13 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Najprv odpočítame prvý riadok od piateho a druhý od štvrtého. V matici, ktorú takto získame, odpočítame piaty stĺpec od prvého a štvrtý od druhého. Postupne tak dostaneme

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Priznávame, že výpočet, ktorý sme práve predviedli je tak trochu podraz voči čitateľovi. Úpravy, ktoré sme pri ňom použili, boli totiž len opačným postupom, ktorým sme pri formulácii úlohy z vopred narafičenej výslednej hornej trojuholníkovej matice „uvarili“ zadanie. Napokon, tak je tomu u väčšiny úloh v učebniciach. No čitateľ, ktorého autor „nepustil do kuchyne“, nemá šancu toto optimálne riešenie nájsť. Teda aspoň pokiaľ je úloha dobre postavená. Predvedieme preto aj iné, „normálne“ riešenie, na aké má šancu prísť aj nezasvätený riešiteľ.

Najprv odpočítame tretí stĺpec od štvrtého aj piateho a jeho dvojnásobok od prvého aj druhého stĺpca. V ďalšom kroku determinant rozvinieme podľa prvého riadku:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Leftrightarrow 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Teraz odpočítame prvý stĺpec od posledného a získaný determinant rozvinieme podľa posledného riadku:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Leftrightarrow 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \Leftrightarrow 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Po odpočítaní trojnásobku druhého stĺpca od tretieho a rozvinutí podľa prvého riadku sme konečne v cieli:

$$|\boldsymbol{A}| = -5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 5\,(12 + 3 \cdot 4) = 5 \cdot 24 = 120.$$

10.5.2. Príklad. Vypočítame tzv. *Vandermondov determinant* rádu n

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Odpočítaním prvého riadku od všetkých ostatných riadkov a následným rozvojom podľa prvého stĺpca dostaneme

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Vyjmime teraz z i-teho riadku činiteľ $x_{i+1} - x_1$ pre každé $1 \le i \le n-1$. V determinante, ktorý získame, je na mieste (i,k), kde $1 \le i \le n-1$, $2 \le k \le n-1$, prvok

$$\sum_{j=0}^{k-1} x_{i+1}^{k-1-j} x_1^j = x_{i+1}^{k-1} - x_1 \sum_{j=0}^{k-2} x_{i+1}^{k-2-j} x_1^j.$$

Ak teda odpočítame od každého stĺpca počnúc druhým x_1-násobok predchádzajúceho stĺpca, postupne nám vyjde

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-2-j} x_1^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-2-j} x_1^j \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1)\ \mathrm{VD}_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

Teraz už aj bez počítania determinantov vidíme, že

$$\mathrm{VD}_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = (x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_2)\ \mathrm{VD}_{n-2}(x_3, \ldots, x_n),$$

atď. Keďže zrejme $\mathrm{VD}_1(x_n) = 1$, dostávame výsledok

$$\mathrm{VD}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

kde symbolom $\prod$ označujeme súčin príslušných činiteľov.

10.6. Inverzná matica a Cramerovo pravidlo

V tomto záverečnom paragrafe si predvedieme dva príklady využitia determinantov. Vyjadríme pomocou nich inverznú maticu k regulárnej štvorcovej matici a riešenie sústavy lineárnych rovníc s regulárnou štvorcovou maticou. Vopred poznamenajme, že tieto vyjadrenia sa na priame výpočty príliš nehodia. Na druhej strane tým, že vyjadrujú inverznú maticu a riešenie spomínanej sústavy v tvare prehľadných ucelených formúl, sú významné hlavne z teoretického hľadiska.

Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ a $1 \leq i, k \leq n$ sú rôzne indexy. Označme $\boldsymbol{B}$ maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ nahradením jej k-teho riadku i-tym riadkom. Potom matica $\boldsymbol{B}$ má (aspoň) dva riadky rovnaké, menovite i-tý a k-tý, preto $|\boldsymbol{B}| = 0$. Na druhej strane matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sa líšia nanajvýš v k-tom riadku, preto $\boldsymbol{A}_{kj} = \boldsymbol{B}_{kj}$ pre každé $1 \leq j \leq n$. Z toho dôvodu sú algebraické doplnky zodpovedajúcich si prvkov k-tych riadkov oboch matíc rovnaké:

$$\tilde{b}_{kj} = (-1)^{k+j} |\boldsymbol{B}_{kj}| = (-1)^{k+j} |\boldsymbol{A}_{kj}| = \tilde{a}_{kj}.$$

Ak rozvinieme determinant matice $\boldsymbol{B}$ podľa jej k-teho riadku, dostaneme

$$\det \boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \tilde{b}_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{kj} = 0.$$

Spojenie tejto rovnosti s Laplaceovým rozvojom determinantu matice $\boldsymbol{A}$ podľa k-teho riadku dáva

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{kj} = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{r}_k\big(\widetilde{\boldsymbol{A}}\big)^T = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{s}_k\big(\widetilde{\boldsymbol{A}}^T\big) = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & \text{ak } i = k, \\ 0, & \text{ak } i \neq k. \end{cases}$$

Inak povedané

$$\boldsymbol{A} \cdot \widetilde{\boldsymbol{A}}^T = |\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{I}_n.$$

Inverznú maticu k regulárnej štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$ potom dostaneme tak, že transponovanú maticu jej algebraických doplnkov vydelíme determinantom $|\boldsymbol{A}|$. Tým sme dokázali nasledujúcu vetu.

10.6.1. Veta. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ je regulárna matica. Potom*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\, \widetilde{\boldsymbol{A}}^T.$$

10.6.2. Príklad. Nájdeme inverznú maticu k reálnej matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Jej determinant a maticu algebraických doplnkov vypočítame ľahko:

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) = 7, \qquad \widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preto

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznamenajme však, že okrem štvorcových matíc rádu 2, kedy je to v podstate jedno, je výpočet inverznej matice pomocou ERO alebo ESO, ako sme ho popísali v paragrafe 7.4, podstatne výhodnejší než výpočet na základe vety 10.6.1. Už pre matice rádu 3 by sme na to potrebovali vypočítať jeden determinant rádu 3 a deväť determinantov rádu 2. Vo všeobecnom prípade by sme museli vypočítať jeden determinant rádu n a n^2 determinantov rádu $n-1$.

Čitateľ sa pravdepodobne po prvýkrát stretol s determinantmi v súvislosti s riešením sústav lineárnych rovníc, v ktorých je počet rovníc a neznámych ten istý. Možno by si v prípadoch 2×2 a 3×3 ešte vedel spomenúť aj na príslušné vzorce. Takéto vzorce, známe ako *Cramerovo pravidlo*, však platia v ľubovoľnom rozmere $n \times n$.

10.6.3. Veta. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je regulárna matica, $\boldsymbol{b} \in K^n$ a pre $1 \le j \le n$ nech $\boldsymbol{A}_j^{\boldsymbol{b}}$ označuje maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ nahradením jej j-teho stĺpca stĺpcovým vektorom $\boldsymbol{b}$. Potom sústava $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má jediné riešenie*

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{|\boldsymbol{A}_1^{\boldsymbol{b}}|}{|\boldsymbol{A}|}, \frac{|\boldsymbol{A}_2^{\boldsymbol{b}}|}{|\boldsymbol{A}|}, \dots, \frac{|\boldsymbol{A}_n^{\boldsymbol{b}}|}{|\boldsymbol{A}|} \right)^T.$$

Dôkaz. Podľa vety 7.4.5 má uvedená sústava jediné riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$. Ak do tohto vyjadrenia dosadíme za $\boldsymbol{A}^{-1}$ z vety 10.6.1, pre j-tu zložku vektora $\boldsymbol{x}$ nám vyjde

$$x_j = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} b_i = \frac{|\boldsymbol{A}_j^{\boldsymbol{b}}|}{|\boldsymbol{A}|},$$

lebo zodpovedajúce si prvky j-tych stĺpcov matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}_j^{\boldsymbol{b}}$ majú rovnaké algebraické doplnky, takže uvedený súčet je Laplaceov rozvoj determinantu $|\boldsymbol{A}_j^{\boldsymbol{b}}|$ podľa j-teho stĺpca.

Varujeme však čitateľa pred používaním Cramerovho pravidla na riešenie konkrétnych sústav n lineárnych rovníc o n neznámych. Metóda úpravy rozšírenej matice sústavy na redukovaný stupňovitý tvar pomocou ERO je oveľa rýchlejšia a pohodlnejšia. Kým vyriešenie takej sústavy pomocou ERO vžaduje úpravu jedinej matice typu $n \times (n+1)$, pri riešení Cramerovým pravidlom by sme museli pri výpočte determinantov upraviť $n+1$ matíc typu $n \times n$.

Na obranu determinantov však poznamenajme, že stretnutie s najdôležitejšími príkladmi ich využitia nás ešte len čaká. Popri tzv. Gramových determinantoch to bude najmä v súvislosti s charakteristickým polynómom a vlastnými hodnotami lineárnych transformácií a štvorcových matíc.