

# LINEÁRNÍ ALGEBRA A GEOMETRIE II

Sylaby přednášky pro letní semestr 1999

MARTIN ČADEK A MILAN SEKANINA

**1. Afinity podprostory.** Body a vektory. Afinity podprostory v  $\mathbb{R}^n$ . Zaměření afinity podprostoru. Afinity báze a afinity souřadnice. Parametrický popis afinity podprostoru. Souvislost s řešeními homogenní a nehomogenní soustavy rovnic. Implicitní popis afinity podprostoru pomocí soustavy rovnic. Vzájemná poloha afinity podprostorů. Afinity zobrazení. Změna afinity souřadnic.

**2. Bilineární a kvadratické formy.** Bilineární formy. Matica bilineární formy vzhledem k dané bázi. Symetrické bilineární formy a symetrické matice. Kvadratické formy. Matica kvadratické formy vzhledem k dané bázi. Změna báze, matice přechodu a kongruentní matice. Diagonalizace.

**3. Bilineární a kvadratické formy nad  $\mathbb{R}$ .** Diagonalizace bilineárních a kvadratických forem nad  $\mathbb{R}$ . Signatura a její invariantnost – Sylvestrův zákon setrvačnosti. Definitnost. Sylvestrova podmínka. Kuželosečky a kvadratické plochy.

**4. Euklidovské prostory.** Skalární součin. Standardní skalární součin a jeho geometrický význam. Další příklady skalárních součinů. Délka (norma) vektoru a úhel dvou vektorů. Cauchyova-Schwartzova nerovnost. Ortogonálnost. Rovnoběžníkové pravidlo, kosinová věta a Pythagorova věta. Nezávislost ortogonálních vektorů. Ortogonální a ortonormální báze. Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces. Komplexní skalární součin. Unitární prostory.

**5. Vzájemná poloha afinity podprostorů v euklidovském prostoru.** Operace ortogonálního doplňku a její základní vlastnosti. Kolmý průmět bodu (vektoru) do afinity (lineárního) podprostoru. Vzdálenost a úhel dvou afinity podprostorů.

**6. Lineární operátory (lineární transformace).** Maticy lineárního operátoru vzhledem na danou bázi. Změna báze, matice přechodu a podobnost matic. Invariantní podprostory lineárních operátorů. Vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru a matice. Charakteristický polynom a charakteristická rovnice. Algebraicky uzavřená pole. Význam pole komplexních čísel – základní věta algebry.

**7. Spektrum lineárního operátoru.** Geometrický význam reálných a komplexních vlastních čísel ve vektorovém prostoru nad  $\mathbb{R}$ . Invariantnost charakteristického polynomu. Algebraická a geometrická násobnost. Spektrum lineárního operátoru. Podmínka diagonalizovatelnosti. Příklady nediyagonalizovatelných operátorů a matic.

**8. Jordanův kanonický tvar.** Kanonické tvary matic. Jordanův kanonický tvar matice. Výpočet Jordanova kanonického tvaru a příslušné báze. Příklady.

**9. Ortogonální a unitární operátory. Písemka.** Ortogonální a unitární operátory a matice, jejich vlastní čísla a vektory. Ortogonální operátory v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  a jejich geometrický význam.

V 2. a 3.hodině písemka, která tvoří 25 % zkoušky.

**10. Spektrální rozklad.** Lineární operátory v euklidovských a unitárních prostorech. Adjungované operátory a vztah jejich matic. Samoadjungované operátory a

symetrické resp. hermitovské matice. Vlastní čísla a vlastní vektory samoadjungovaných operátorů. Projektory. Spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru a hermitovské a symetrické matice.

**11. Věta o hlavních osách.** Důsledky spektrálního rozkladu symetrických matic pro bilineární a kvadratické formy nad  $\mathbb{R}$ . Ortogonální podobnost matic a věta o hlavních osách. Metrická klasifikace kvadrik v dvoj- a trojrozměrném euklidovském prostoru.

**12. Grupy.** Abstraktní pojem grupy. Komutativní (abelovské) a nekomutativní grupy. Grupy transformací. Další příklady grup. Podgrupy dané grupy. Homomorfizmy grup. Izomorfismus grup a izomorfní grupy. Jádru a obraz homomorfizmu. Příklady podgrup a homomorfizmů. Cyklické grupy. Přímý součin grup.

**13. Lineární a afinní grupy.** Všeobecná lineární grupa  $GL(n, K)$  a speciální lineární grupa  $SL(n, K)$ . Ortogonální grupa  $O(n)$ , speciální ortogonální grupa  $SO(n)$  a jejich geometrický význam. Unitární grupa  $U(n)$  a speciální unitární grupa  $SU(n)$ . Grupa posunutí a afinní rozšíření lineárních grup. Bilineární a kvadratické formy jako invarianty. Grupa izometrií euklidovského prostoru. Stručně o projektivních prostorech a zobrazeních.

## LITERATURA

- [1] G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Prehľad modernej algebry*, Alfa, Bratislava, 1979.
- [2] P. Horák, *Lineární algebra*, skripta PřF UJEP, Brno, 1975.
- [3] S. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algebra*, Alfa, Bratislava, 1973, (2. vydání: 1978).
- [4] L. Motl, M. Zahradník, *Pěstujeme lineární algebra*, Univerzita Karlova, vydavatelství Karolinum, Praha, 1995.
- [5] J. Slovák, *Lineární algebra*, skripta PřF MU, Brno, 1995, elektronický učební text dostupný na internetu, <http://www.math.muni.cz/~slovak>.
- [6] B. Šmarda, *Lineární algebra*, skripta PřF UJEP, Brno, 1982.
- [7] P. Zlatoš, *Lineární algebra a geometria*, připravovaná skripta MFF Univerzity Komenského.

## Rámcový program cvičení z LA II

- 1. Opakování
- 2. Rovnice afinních podprostorů a jejich vzájemná poloha (Slovák 21)
- 3,4. Bilineární a kvadratické formy, kuželosečky (Slovák 18, 19)
- 5. Skalární součin, ortonormální báze, (Slovák 15, 16)
- 6,7. Kolmá projekce, euklidovská analytická geometrie, vzdálenost a úhel (Slovák 17, 22, 23)
- 8,9. Vlastní čísla, vlastní vektory, Jordanův kanonický tvar (Slovák 11, 12, 13)
- 10,11. Ortogonální zobrazení a matice, izometrie v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  (Slovák 17)
- 12,13. Symetrické matice, metrická klasifikace kuželoseček (Slovák 20, 24)

## ZDROJE PŘÍKLADŮ

- [1] J. Slovák, *Cvičení z lineární algebry*, <http://www.math.muni.cz/~slovak>.
- [2] M. Čadek, *Vybrané příklady z písemek do roku 1997*, xerox 4 strany.
- [3] M. Čadek, P. Zlatoš, *Písemky z letního semestru 1998*, <http://www.math.muni.cz/~cadek>.
- [4] P. Kaprálik, J. Tvarožek, *Zbierka riešených príkladov z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislav, 1987.
- [5] Proskurjakov, *Sborník zadač po liněnoj algebre*, (rusky).