C. Písemka z lineární algebry II, červen 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se počítá s váhou 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto A{\cdot}x$ matici J. (*3 body*)

2. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,1,0)$ takové, že $\varphi(1,-1,0) = (0,0,\sqrt{2})$. Najděte matici zobrazení φ ve standartní bázi. (Možný postup: Zjistěte, kam se zobrazí vektory standardní báze.) (*3 body*)

3. Rovnicí $6x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 16 = 0$ je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, a najděte směry a délky její hlavní a vedlejší polosy. Načrtněte obrázek. (*3 body*)

4. Nechť L je množina všech matic $X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, které komutují s maticí B (viz výše). Najděte všechny matice množiny L a dokažte, že L je podgrupou grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. (*2 body*)

5.(a) Napište definici ortogonálního zobrazení.
(b) Napište postup pro výpočet vzdálenosti bodu od afinního podprostoru v $\mathbb{R}^n$.
(c) Jak se při změně báze transformují matice kvadratických forem.
(d) Dokažte, že kolmá projekce na daný podprostor euklidovského prostoru je samoadjungované zobrazení. (*4 body*)

D. Písemka z lineární algebry II, červen 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se počítá s váhou 2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice C a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto C{\cdot}x$ matici J. (*3 body*)

2. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,-1,0)$ takové, že $\varphi(1,1,0) = (0,0,\sqrt{2})$. Najděte matici zobrazení φ ve standartní bázi. (Možný postup: Zjistěte, kam se zobrazí vektory standardní báze.) (*3 body*)

3. Rovnicí $13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2 - 72 = 0$ je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, a najděte směry a délky její hlavní a vedlejší polosy. Načrtněte obrázek. (*3 body*)

4. Nechť K je množina všech matic $X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, které komutují s maticí D (viz výše). Najděte všechny matice množiny K a dokažte, že K je podgrupou grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. (*2 body*)

5.(a) Napište definici samoadjungovaného operátoru.
(b) Napište postup pro výpočet odchylky přímky a afinního podprostoru v $\mathbb{R}^n$.
(c) Jak se při změně báze transformují matice lineárních operátorů.
(d) Dokažte, že kolmá projekce na daný podprostor euklidovského prostoru je samoadjungované zobrazení. (*4 body*)

Řešení C

1. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Jedna z možných bází (t. j. sloupce matice přechodu)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Jde o otočení o 90 stupňů. Matice je

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\varphi(1,0,0)^T = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)^T, \varphi(0,1,0)^T = (1/2, 1/2, -\sqrt{2}/2)^T, \varphi(0,0,1)^T = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T.$$

3. Elipsa: hlavní polosa $a = 2$ v směru přímky $x+y = 0$, vedlejší polosa $b = \sqrt{2}$ v směru přímky $x-y = 0$.

4. $L = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.

5. Viz přednášky.

Řešení D

1. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jedna z možných bází (t. j. sloupce matice přechodu)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Jde o otočení o 90 stupňů. Matice je

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\varphi(1,0,0)^T = (1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)^T, \varphi(0,1,0)^T = (-1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)^T, \varphi(0,0,1)^T = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)^T.$$

3. Elipsa: hlavní polosa $a = 3$ v směru přímky $x+y = 0$, vedlejší polosa $b = 2$ v směru přímky $x-y = 0$.

4. $L = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.

5. Viz přednášky.