A. Písemka z lineární algebry II, květen 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se počítá s váhou 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, v které má lineární operátor $x \mapsto A \cdot x$ matici J. (*3 body*)

2. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů matice B zjistěte, jakou geometrickou transformaci euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineární operátor $x \mapsto B \cdot x$. (U otáčení není potřeba určit směr.) (*3 body*)

3. Rovnicí $3x_2^2 + 4x_1x_2 + 16 = 0$ je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, a nájděte směry a délky její hlavní a vedlejší polosy. Načrtněte obrázek. (*3 body*)

4. Nechť C je množina všech matic $X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, které komutují se všemi ostatními maticemi v $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Najděte C explicitně a dokažte, že je podgrupou grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. (*2 body*)

5.(a) Napište Jordanovu větu pro matice nad komplexními čísly.
(b) Napište definici ortogonálního doplňku k podprostoru v euklidovském prostoru.
(c) Definujte homomorfismus grup.
(d) Dokažte, že každé tři nenulové, navzájem kolmé vektory v euklidovském prostoru jsou lineárně nezávislé. (*4 body*)

B. Písemka z lineární algebry II, květen 1999

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se počítá s váhou 2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -17 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice C a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, v které má lineární operátor $x \mapsto C \cdot x$ matici J. (*3 body*)

2. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů matice D zjistěte, jakou geometrickou transformaci euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineární operátor $x \mapsto D \cdot x$. (U otáčení není potřeba určit směr.) (*3 body*)

3. Rovnicí $6x_1^2 - 8x_1x_2 + 8 = 0$ je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, a nájděte směry a délky její hlavní a vedlejší polosy. Načrtněte obrázek. (*3 body*)

4. Nechť K je množina všech matic $X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, které komutují se všemi ostatními maticemi v $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Najděte K explicitně a dokažte, že je podgrupou grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. (*2 body*)

5.(a) Napište Sylvestrův zákon setrvačnosti pro kvadratické formy.
(b) Napište definici kolmého průmětu vektoru do podprostoru v euklidovském prostoru.
(c) Definujte jádro homomorfismu grup.
(d) Dokažte, že každé tři nenulové, navzájem kolmé vektory v euklidovském prostoru jsou lineárně nezávislé. (*4 body*)