Část společná předmětům M003 a M503

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů α a β má soustava v Z_5

$$\begin{aligned} 2\alpha x + \quad y \quad\quad &= \alpha \\ 2\alpha y + z \quad &= \beta \\ x \quad\quad + 2\alpha z &= \beta \end{aligned}$$

(a) právě jedno řešení;
(b) více než jedno řešení;
(c) žádné řešení.
V případě (b) všechna řešení najděte.

(3 body)

2. V C řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (1+i)x + \quad (1-i)y &= 6+4i \\ ix + (1+2i)y &= -3+5i \end{aligned}$$

(2 body)

3. V R^4 najděte báze průniku a součtu podprostorů S a T, kde

$$\begin{aligned} S &= \langle (1,0,1,-1), (1,1,0,3), (2,1,-1,1) \rangle \\ T &= \langle (1,0,3,4), (3,-1,2,-1), (1,-1,2,2) \rangle \end{aligned}$$

(3 body)

4. Najděte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -12 \\ -6 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

5. Ve vektorovém prostoru $R_3[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 3 najděte souřadnice vektoru $1-x^3$ v bázi

$$\alpha = (1+x^2, x+x^3, x, x+x^2)$$

(1 bod)

Část pouze pro předmět M003, magisterské studium

1. Napište definici množiny lineárně nezávislých vektorů ve vektorovém prostoru V. *(2 body)*
2. Popište elementární řádkové transformace (operace) s maticemi, definujte řádkově schodovitý tvar a zformulujte větu o převedení matice na řádkově schodovitý tvar. *(2 body)*
3. Je dána báze α vektorového prostoru U nad polem K. Z definice báze dokažte, že pro každé $u \in U$ existuje právě jedna n-tice

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$$

tak, že

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

(2 body)

4. Dokažte, že množina reálných čísel R se standartní operací sčítání a násobením

$$a \circ v = v$$

není vektorový prostor nad R. *(2 body)*
5. Napište nějakou bázi prostoru $C_3[x]$ nad polem C a nějakou bázi prostoru $C_3[x]$ nad polem R. *(2 body)*

Část společná předmětům M003 a M503

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů γ a δ má soustava v Z_7

$$\begin{aligned} 3\gamma x + \quad y \qquad &= \delta \\ 3\gamma y + z \quad &= \gamma \\ x \qquad + 3\gamma z &= \delta \end{aligned}$$

(a) právě jedno řešení;
(b) více než jedno řešení;
(c) žádné řešení.
V případě (b) všechna řešení najděte.

(3 body)

2. V C řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (1+i)x + (1-i)y &= 6-4i \\ (1-2i)x - \qquad iy &= -3-5i \end{aligned}$$

(2 body)

3. V R^4 najděte báze průniku a součtu podprostorů S a T, kde

$$\begin{aligned} S =& \langle (1,1,1,1), (1,-2,-2,1), (1,0,0,-3) \rangle \\ T =& \langle (1,0,1,-2), (-3,1,1,1), (1,2,1,3) \rangle \end{aligned}$$

(3 body)

4. Najděte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -12 & 4 & 8 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

5 Ve vektorovém prostoru $R_3[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 3 najděte souřadnice vektoru $-1+x+2x^2-2x^3$ v bázi

$$\alpha = (1+x^3, x^2+x^3, x^3, x+x^2)$$

(1 bod)

Část pouze pro předmět M003, magisterské studium

1. Napište definici množiny lineárně závislých vektorů ve vektorovém prostoru V. *(2 body)*
2. Popište elementární řádkové transformace (operace) s maticemi, definujte řádkově schodovitý tvar a zformulujte větu o převedení matice na řádkově schodovitý tvar.

(2 body)

3. Je dána báze α vektorového prostoru U nad polem K. Z definice báze dokažte, že pro každé $u \in U$ existuje právě jedna n-tice

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$$

tak, že

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

(2 body)

4. Dokažte, že množina reálných čísel R se standartní operací sčítání a násobením

$$a \circ v = a^2.v$$

není vektorový prostor nad R. *(2 body)*
5. Napište nějakou bázi prostoru komplexních matic 2×2 nad polem C a nějakou bázi prostoru komplexních matic 2×2 nad polem R. *(2 body)*

1.
a) $\alpha \neq 2$
b) $\alpha = 2, \beta = 4$. Řešení jsou dány $y = x + 2$, $z = x + 1$:

$$(0,2,1),(1,3,2),(2,4,3),(3,0,4),(4,1,0)$$

c) $\alpha = 2, \beta \neq 4$

2. $x = 3 - i, y = 2i$.
3. $S + T = R^4$, $S \cap T = \langle (1,1,1,2),(2,0,0,-3) \rangle$.
4.

$$A^{-1} = -1/4 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Souřadnice jsou $(1,-1,2,-1)$.

Test z LA 1, 1999 – řešení skupiny F

1.
a) $\gamma \neq 2$
b) $\gamma = 2, \delta = 6$. Řešení jsou dány $z = x + 1$ a $y = x + 6$:

$$(0,6,1),(1,0,2),(2,1,3),(3,2,4),(4,3,5),(5,4,6),(6,5,0)$$

c) $\gamma = 2, \delta \neq 6$

2. $x = -2i, y = 3 + i$.
3. $S + T = R^4$, $S \cap T = \langle (-3,1,1,1),(1,-3,-3,-2) \rangle$.
4.

$$A^{-1} = -1/4 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Souřadnice jsou $(-1,1,-2,1)$.