Část společná předmětům M003 a M503

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů α a β má soustava v Z_5

$$\begin{aligned} \alpha x + \quad y + z &= \beta \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ x + \quad y + \alpha z &= 0 \end{aligned}$$

(a) právě jedno řešení;
(b) více než jedno řešení;
(c) žádné řešení.
V případě (b) všechna řešení najděte.

(3 body)

2. V C řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (1+i)x + \qquad 3iy &= -i \\ (1+2i)x + (1-i)y &= 6+i \end{aligned}$$

(2 body)

3. V R^4 najděte báze průniku a součtu podprostorů S a T, kde

$$\begin{aligned} S &= \langle (1,1,0,-1), (1,2,2,1), (0,1,-1,2) \rangle \\ T &= \langle (2,4,1,2), (2,1,-1,-1), (-1,0,4,0) \rangle \end{aligned}$$

(3 body)

4. Najděte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

5. Ve vektorovém prostoru reálných matic 2×2 najděte souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ v bázi

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

(1 bod)

Část pouze pro předmět M003, magisterské studium

1. Napište definici vektorového prostoru nad polem K. *(2 body)*
2. Je dána báze α vektorového prostoru a množina M lineárně nezávislých vektorů. Zformulujte větu o doplnění do báze. *(2 body)*
3. Nechť U a V jsou vektorové podprostory ve vektorovém prostoru W. Dokažte

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

(2 body)
4. Nechť U_1, U_2, V jsou vektorové podprostory ve vektorovém prostoru W. Jestliže $U_1 \subseteq V$ a $U_2 \subseteq V$, pak $U_1 + U_2 \subseteq V$. Dokažte. *(2 body)*
5. Ve vektorovém prostoru $R_2[x]$ polynomů stupně maximálně 2 najděte nějakou nekonečnou množinu, která není vektorový podprostor. *(2 body)*

Část společná předmětům M003 a M503

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů γ a δ má soustava v Z_7

$$\begin{aligned} x + \gamma y + z &= 1 \\ x + y + \gamma z &= 3 \\ \gamma x + y + z &= \delta \end{aligned}$$

(a) právě jedno řešení;
(b) více než jedno řešení;
(c) žádné řešení.
V případě (b) všechna řešení najděte.

(3 body)

2. V C řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (1+i)x + (1-i)y &= 4 \\ (1-2i)x + (2+i)y &= -2+4i \end{aligned}$$

(2 body)

3. V R^4 najděte báze průniku a součtu podprostorů S a T, kde

$$\begin{aligned} S &= \langle (2,2,1,0), (-2,1,2,3), (1,1,0,1) \rangle \\ T &= \langle (1,-1,1,1), (0,1,3,5), (0,1,1,1) \rangle \end{aligned}$$

(3 body)

4. Najděte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

5. Ve vektorovém prostoru reálných matic 2×2 najděte souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ v bázi

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

(1 bod)

Část pouze pro předmět M003, magisterské studium

1. Napište definici pole. *(2 body)*

2. Je dána báze α vektorového prostoru a množina M lineárně nezávislých vektorů. Zformulujte větu o doplnění do báze. *(2 body)*

3. Nechť U a V jsou vektorové podprostory ve vektorovém prostoru W. Dokažte

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

(2 body)

4. Nechť U je vektorový podprostor ve vektorovém prostoru V. Potom lineární obla U je roven U, tj.

$$\langle U \rangle = U, \qquad \text{resp.} \qquad [U] = U$$

Dokažte. *(2 body)*

5. Ve vektorovém prostoru reálných matic 2×2 najděte nějakou nekonečnou množinu, která není vektorový podprostor. *(2 body)*

1.
a) $\alpha \neq 3$
b) $\alpha = 3, \beta = 4$. Řešení jsou dány $x = y + 4$, $z = y + 2$:

$$(4,0,2),(0,1,3),(1,2,4),(2,3,0),(3,4,1)$$

c) $\alpha = 3, \beta \neq 4$

2. $x = 1 - 2i, y = i$.
3. $S + T = R^4$, $S \cap T = \langle (1,1,3,-1),(2,4,1,2) \rangle$.
4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 9 & -4 & -6 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Souřadnice jsou $(3,2,-3,1)$.

Test z LA 1, 1999 – řešení skupiny D

1.
a) $\gamma \neq 5$
b) $\gamma = 5, \delta = 3$. Řešení jsou dány $x = z = y + 4$:

$$(4,0,4),(5,1,5),(6,2,6),(0,3,0),(1,4,1),(2,5,2),(3,6,3)$$

c) $\gamma = 5, \delta \neq 3$

2. $x = -i, y = 1 + 2i$.
3. $S + T = R^4$, $S \cap T = \langle (-1,2,2,4),(0,1,1,1) \rangle$.
4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -6 & -4 & 9 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Souřadnice jsou $(5,-1,1,-2)$.