Část společná předmětům M003 a M503

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů α a β má soustava v Z_5

$$\begin{aligned} \alpha x + y \quad &= \beta \\ \alpha y + z &= 2\beta \\ x \quad + \alpha z &= 4 \end{aligned}$$

(a) právě jedno řešení;
(b) více než jedno řešení;
(c) žádné řešení.
V případě (b) všechna řešení najděte.

(3 body)

2. V C řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ix + (1-i)y &= 0 \\ (1+i)x + \quad iy &= 3i - 3 \end{aligned}$$

(2 body)

3. V R^4 najděte báze průniku a součtu podprostorů S a T, kde

$$\begin{aligned} S &= \langle (1,2,0,1), (1,-1,1,1), (2,0,-1,2) \rangle \\ T &= \langle (1,0,1,1), (0,2,1,-1), (3,0,2,1) \rangle \end{aligned}$$

(3 body)

4. Najděte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

5. Ve vektorovém prostoru $R_2[x]$ polynomů stupně maximálně 2 najděte souřadnice vektoru $x^2 - 4x$ v bázi $\alpha = (1, x+1, (x-1)^2)$.

Část pouze pro předmět M003, magisterské studium

1. Napište definici lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru V. *(1 bod)*
2. Napište definici souřadnic vektoru V v bázi α vektorového prostoru V. Zformulujte vlastnost báze, která se v této definici používá. *(1 bod)*
3. Dokažte, že součet podprostorů U a V vektorového prostoru W je vektorový podprostor. *(1 bod)*
4. Jsou-li vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru V, pak u_1, u_2, u_3 jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte. *(1 bod)*
5. V prostoru reálných matic 2×2 najděte dvoudimenzionální podprostor obsahující matici

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 19 & 99 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

Část společná předmětům M003 a M503

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů γ a δ má soustava v Z_7

$$\begin{aligned} y + \gamma z &= 3\delta \\ \gamma x \quad + z &= \delta \\ x + \gamma y \quad &= 4 \end{aligned}$$

(a) právě jedno řešení;
(b) více než jedno řešení;
(c) žádné řešení.
V případě (b) všechna řešení najděte.

(3 body)

2. V C řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (2+i)x + \qquad iy &= -i \\ (1+i)x + (1-i)y &= 5+3i \end{aligned}$$

(2 body)

3. V R^4 najděte báze průniku a součtu podprostorů S a T, kde

$$\begin{aligned} S =&\langle(1,2,2,0),(3,0,2,1),(3,2,3,0)\rangle \\ T =&\langle(2,1,1,2),(1,-1,1,1),(0,1,2,0)\rangle \end{aligned}$$

(3 body)

4. Najděte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

5. Ve vektorovém prostoru $R_2[x]$ polynomů stupně maximálně 2 najděte souřadnice vektoru $x^2 - 4x$ v bázi $\alpha = (1, x-1, (x-1)^2)$.

Část pouze pro předmět M003, magisterské studium

1. Napište definici lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru V. *(1 bod)*
2. Napište definici souřadnic vektoru V v bázi α vektorového prostoru V. Zformulujte vlastnost báze, která se v této definici používá. *(1 bod)*
3. Dokažte, že součet podprostorů U a V vektorového prostoru W je vektorový podprostor. *(1 bod)*
4. Jsou-li vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru V, pak u_1, u_2, u_3 jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte. *(1 bod)*
5. V prostoru reálných matic 2×2 najděte dvoudimenzionální podprostor obsahující matici

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 19 & 99 \end{pmatrix}$$

(1 bod)

1.
a) $\alpha \neq 4$
b) $\alpha = 4, \beta = 2$. Řešení jsou dány $x = y + 3$, $z = y + 4$:

$$(3,0,4),(4,1,0),(0,2,1),(1,3,2),(2,4,3)$$

c) $\alpha = 4, \beta \neq 2$

2. $x = 2i, y = 1 + i$.
3. $S + T = R^4$, $S \cap T = \langle(1,0,1,1),(3,-4,0,3)\rangle$.
4.

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Souřadnice jsou $(1,-2,1)$.

Test z LA 1, 1999 – řešení skupiny B

1.
a) $\gamma \neq 6$
b) $\gamma = 6, \delta = 6$. Řešení jsou dány $x = z + 1$, $y = z + 4$:

$$(1,4,0),(2,5,1),(3,6,2),(4,0,3),(5,1,4),(6,2,5),(0,3,6)$$

c) $\gamma = 6, \delta \neq 2$

2. $x = 1 - i, y = 3i$.
3. $S + T = R^4$, $S \cap T = \langle(1,0,1,1),(3,-4,0,3)\rangle$.
4.

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Souřadnice jsou $(-3,-2,1)$.