

D. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část
Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtete determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (2 body)

2. V \mathbb{R}^4 uvažujme rovinu $\rho : \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0)$, přímku $p : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0)$ a vektor $u = (2, 4, -2, -1)$. Najděte přímku q , která má směrový vektor u , protíná rovinu ρ a přímku p . Slovy popište stručně postup a vypočtete. (3 body)

3. V \mathbb{R}^4 najděte nějaký bod A , zaměření $Z(\rho)$ afinního podprostoru ρ a jeho parametrický popis, je-li ρ zadáno soustavou rovnic

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \quad x_1 + x_2 + x_4 = 7, \quad x_2 - x_3 - x_4 = -5.$$

(2 body)

4. V \mathbb{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$ a přímky $p : (3, 1, 0, 0) + \alpha(-1, 2, 1, 1)$. (3 body)

5. Najděte matici přechodu od báze $\beta = ((1, 0, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (0, 1, 1)^T)$ v \mathbb{R}^3 k bázi $\alpha = ((1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T)$. Pomocí této matice vypočtete souřadnice vektoru u v bázi α , víte-li, že jeho souřadnice v bázi β jsou $(1, 2, -1)$. (2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takové, že $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$, $f(0, 0, 1) = (1, -1, 2)$.

a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.

b) Najděte bázi $\text{Ker } f$.

c) Najděte bázi $\text{Im } f$. (3 body)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici afinního podprostoru ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n . (Vysvětlete použité označení.) (2 body)

2. Napište Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy lineárních rovnic. Pro které soustavy lineárních rovnic jej můžeme použít? (2 body)

3. Napište definici součtu dvou podprostorů V a U ve vektorovém prostoru X . (2 body)

4. Určete znaménko permutace $(2n, 2n - 2, \dots, 4, 2, 2n - 1, 2n - 3, \dots, 3, 1)$. (2 body)

5. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jsou-li u_1, u_2, u_3 lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru U , pak $u_1 + 2u_2 - u_3, 2u_1 - u_2, 2u_1 + u_2 - u_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. (3 body)

6. V \mathbb{R}^3 zadejte parametricky 2000 přímek, které jsou po dvou navzájem mimoběžné. Jejich mimoběžnost stručně, ale jasně ukažte. (2 body)

7. Najděte reálnou čtvercovou matici A , $A \neq \pm E$ tak, aby $A^{-1} = A$. (2 body)

E. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtete determinant matice $A = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$. (2 body)

2. V \mathbb{R}^4 uvažujme rovinu $\rho : \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0)$, přímku $p : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0)$ a vektor $u = (2, -3, 4, -1)$. Najděte přímku q , která má směrový vektor u , protíná rovinu ρ a přímku p . Slovy popište stručně postup a vypočtete. (3 body)

3. V \mathbb{R}^4 najděte nějaký bod A , zaměření $Z(\rho)$ afinního podprostoru ρ a jeho parametrický popis, je-li ρ zadáno soustavou rovnic

$$x_1 + x_2 - x_4 = -5, \quad 2x_1 - x_3 + x_4 = -3, \quad 2x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

(2 body)

4. V \mathbb{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + x_2 - x_4 = -1, 2x_1 - x_3 + x_4 = -3$ a přímky $p : (0, 1, 2, 0) + \alpha(-1, 1, 2, 1)$. (3 body)

5. Najděte matici přechodu od báze $\beta = ((0, 2, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T)$ v \mathbb{R}^3 k bázi $\alpha = ((1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T)$. Pomocí této matice vypočtete souřadnice vektoru u v bázi α , víte-li, že jeho souřadnice v bázi β jsou $(1, 2, -1)$. (2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takové, že $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2, -1)$, $f(1, 0, 1) = (0, -1, 1)$.

a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.

b) Najděte bázi $\text{Ker } f$.

c) Najděte bázi $\text{Im } f$. (3 body)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici lineární nezávislosti vektorů u_1, u_2, \dots, u_k ve vektorovém prostoru U . (2 body)

2. Napište vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí algebraických doplňků. (Vysvětlete použité označení.) (2 body)

3. Napište definici lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru X . (2 body)

4. Určete znaménko permutace $(2n - 1, 2n - 3, \dots, 3, 1, 2n, 2n - 2, \dots, 4, 2)$. (2 body)

5. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jsou-li u_1, u_2, u_3 lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru U , pak $u_1 - 2u_2 - u_3, 2u_1 - u_2, 2u_1 - 3u_2 - u_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. (3 body)

6. V \mathbb{R}^2 zadejte parametricky 2000 bodů, z nichž žádné 3 neleží na jedné přímce. Tuto jejich vlastnost stručně, ale jasně ukažte. (2 body)

7. Najděte reálnou čtvercovou matici A , tak, aby $A^{-1} = -A$. (2 body)

D. Řešení početní části

1. $-(1 - a^2)^2$

2 body

2. Najdeme rovinu τ určenou přímkou p a směrovým vektorem u a spočítáme její průnik s rovinou ρ , bod Q . Hledaná přímka q prochází bodem Q (pokud tento existuje.)

$$\tau : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(2, 4, -2, -1)$$

Výpočet průniku $pM \cap \rho$ vede k soustavě s řešením $\delta = 1, \gamma = 2$.

$$Q = (2, 4, 0, 0), \quad q : (2, 4, 0, 0) + t(2, 4, -2, -1).$$

3 body

3.

$$\rho : (1, 2, 3, 4) + t(0, 1, 2, -1)$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = \emptyset$. Například tak, že parametrické vyjádření p dosadíme do rovnic ρ . Dále zjistíme, že směrový vektor přímky p nesplňuje homogenní rovnice pro zaměření podprostoru ρ . Tedy p a ρ jsou mimoběžné.

3 body

5.

$$(id)_{\alpha, \beta} = \alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_{\alpha} = (id)_{\alpha, \beta}(u)_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1 bod

6a.

$$(f)_{\varepsilon_4, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6b.

$$\text{Ker } f = [(1, 2, -1)]$$

6c.

$$\text{Im } f = [(1, 1, 0), (0, -1, 1)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4.

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

2 body

6.

$$p_n : (0, 0, n) + t(1, n, 0) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, 2000.$$

2 body

7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 body

E. Řešení početní části

1. $(1 - e^2)^2$

2 body

2. Najdeme rovinu τ určenou přímkou p a směrovým vektorem u a spočítáme její průnik s rovinou ρ , bod Q . Hledaná přímka q prochází bodem Q (pokud tento existuje.)

$$\tau : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(2, -3, 4, -1)$$

Výpočet průniku $pM \cap \rho$ vede k soustavě s řešením $\delta = 1, \gamma = -4$.

$$Q = (2, -3, 0, 0), \quad q : (2, -3, 0, 0) + t(2, -3, 4, -1).$$

3 body

3.

$$\rho : (-2, -1, 1, 2) + t(1, -1, 2, 0)$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = \emptyset$. Například tak, že parametrické vyjádření p dosadíme do rovnic ρ . Dále zjistíme, že směrový vektor přímky p nesplňuje homogenní rovnice pro zaměření podprostoru ρ . Tedy p a ρ jsou mimoběžné.

3 body

5.

$$(id)_{\alpha, \beta} = \alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_{\alpha} = (id)_{\alpha, \beta}(u)_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1 bod

6a.

$$(f)_{\varepsilon_4, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6b.

$$\text{Ker } f = [(1, 1, 2)]$$

6c.

$$\text{Im } f = [(1, 0, 1), (1, 2, -1)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4.

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{3n(n-1)}{2}}$$

2 body

6.

$$A_n = (n, n^2) \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, 2000.$$

2 body

7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 body