CVIČENÍ K PŘEDNÁŠKÁM Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I

Martin Čadek

Tento text vznikl na základě kapitoly Cvičení k přednáškám elektronického učebního textu doc. Jana Slováka o lineární algebře. Pořadí úloh je přizpůsobeno sylabům lineární algebry na fakultě informatiky, objevují se zde úlohy, které se vyskytly v minulých letech v písemkách nebo které jsme s Dr. Sekaninou počítali v minulých letech na cvičeních.

1. Opakování. Počítání s komplexními čísly

1. Algebraický a goniometrický tvar komplexních čísel. Znázornění komplexních čísel v rovině. Absolutní hodnota komplexního čísla.

2. Sčítání komplexních čísel a jeho geometrický význam. Opačné komplexní číslo, odčítání komplexních čísel.

3. Násobení komplexních čísel v algebraickém i goniometrickém tvaru. Geometrický význam násobení. Číslo komplexně sdružené, jeho geometrický význam a vztah k absolutní hodnotě($z\bar{z} = |z|^2$). Převrácené číslo a dělení komplexních čísel.

4. Popis stejnolehlosti a otočení s použitím komplexních čísel ($z \mapsto rz$, $z \mapsto z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$).

5. Řešení rovnice $(a+ib)x = c+id$ pro konkrétní komplexní čísla.

6. Řešení rovnic typu $z^n = a+ib$. (Návod: řešení hledejte ve tvaru $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a použijte toho, že $z^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.) Řešte $z^3 = i$, $z^4 = -1$.

2. Pole a vektorové prostory

1. V obecném poli $\mathbb{K}$ řešte rovnici $ax = b$. Rozeberte všechny možnosti a uvědomte si, které axiomy pole při řešení používáme. Proveďte pro konkrétní komplexní čísla a, b.

2. Procvičte sčítání a násobení v polích $\mathbb{Z}_p$. Hledejte opačné a inverzní prvky. Pro konkrétní čísla p, a, b, c řešte rovnici $ax+b=c$.

3. Ukažte, že pro n složené číslo a $a \neq 0$ může mít rovnice $ax = b$ v $\mathbb{Z}_n$ více řešení nebo žádné řešení.

4. Procvičte sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem ve vektorových prostorech $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Z}_5^n$.

5. Zjistěte, zda množina $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x.y$, $a \odot x = x^a$ pro $x, y \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor. Pokud ano, určete jeho bázi a dimenzi.

6. Procvičte sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem ve vektorových prostorech polynomů stupně nejvýše n: $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathbb{C}_n[x]$, $(\mathbb{Z}_5)_n[x]$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3. Operace s maticemi.

1. Zopakujte pojmy sloupce matice, řádky matice, operace sčítání a násobení. Vynásobte několik příkladů matic, najděte nějaké dělitele nuly, tj. matice A a B různé od nulové matice, jejichž součin je roven nulové matici.

2. Uvažme matice nad $\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spočtěte (pokud je definováno) EI, IE, $D^3+4DH-H^2$, G^2-3F, $A-F$, $A-GFA$, $BACE-BFB^T$ a další "polynomiální výrazy" dle vlastní volby.

3. Ukažte, že násobení sloupcového vektoru v $\mathbb{R}^2$ maticí $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje otočení v rovině o úhel α. Spočtěte A^2, A^3 (obecně A^k).

4. Maticí A tvaru $n \times n$ takovou, že $A_{22} = a$, $A_{ii} = 1$ pro všechna $i \neq 2$ a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij, vynásobte obecnou matici $B = (B_{ij})$ tvaru $n \times m$ zleva a obecnou matici $C = (C_{ij})$ tvaru $m \times n$ zprava. Jak se výsledek násobení liší od matice B, resp. C?

5. Maticí A tvaru $n \times n$ takovou, že $A_{13} = A_{22} = A_{31} = A_{ii} = 1$ pro $i \geq 4$ a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij, vynásobte obecnou matici $B = (B_{ij})$ tvaru $n \times m$ zleva a obecnou matici $C = (C_{ij})$ tvaru $m \times n$ zprava. Jak se výsledek násobení liší od matice B, resp. C?

6. Maticí A tvaru $n \times n$ takovou, že $A_{13} = a$, $A_{ii} = 1$ pro všechna i a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij, vynásobte obecnou matici $B = (B_{ij})$ tvaru $n \times m$ zleva a obecnou matici $C = (C_{ij})$ tvaru $m \times n$ zprava. Jak se výsledek násobení liší od matice B, resp. C?

7. Některé matice z příkladu 2 upravte na řádkový (sloupcový) schodovitý tvar a redukovaný řádkový schodovitý tvar.

4. Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte systém rovnic v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Řešte systém rovnic v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_7$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Řešte systém rovnic v $\mathbb{C}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} ix_1 + (1+i)x_2 &= 2 \\ (1-i)x_1 - ix_2 &= i \end{aligned}$$

4. Řešte systém rovnic v $\mathbb{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

5. Řešte homogenní systémy rovnic v $\mathbb{R}$ zadané maticemi:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$$

6. Řešte systémy rovnic v $\mathbb{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

(1)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 12x_1 - x_2 + 5x_3 &= 30 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

7. Řešte systém rovnic s parametrem $\alpha \in \mathbb{K}$, uvažte přitom možnosti $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

8. V $\mathbb{Z}_5$ řešte soustavu rovnic

$$2x + 3y - z = 1, \quad 3x + 2y - 4z = 4, \quad x - y = 0.$$

Napište výčtem všechny prvky množiny řešení.

9. V $\mathbb{Z}_5$ řešte soustavu rovnic

$$x + y = 0, \quad x + 2y + 3z = 2, \quad 4x - 2y + 2z = 3.$$

Napište výčtem všechny prvky množiny řešení.

10. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z:

$$x - ay - 2z = b \quad , \quad x + (1-a)y = b - 3 \quad , \quad x + (1-a)y + az = 2b - 1.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů a, b, pro které má soustava a) jediné řešení, b) nekonečně mnoho řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) najděte tato řešení v závislosti na a, b.

11. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z:

$$x + cy - cz = -3 \quad , \quad x + (c-1)y - (c+3)z = -5 \quad , \quad x + (c+1)y + 2z = d - 1.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů c, d, pro které má soustava a) jediné řešení, b) nekonečně mnoho řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) najděte tato řešení v závislosti na c, d.

12. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$2x + 3y = 1 \quad , \quad 3x + 4y + az = 2 \quad , \quad 3x + 4az = b.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů a, b, pro které má soustava a) jediné řešení, b) více než jedno řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) vyjádřete řešení v závislosti na a, b pomocí operací sčítání a násobení nad $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

13. Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$3x + cz = 1 \quad , \quad 2x + 4y + cz = 3 \quad , \quad 2x + y + 2cz = d.$$

Najděte všechny hodnoty parametrů c, d, pro které má soustava a) jediné řešení, b) více než jedno řešení, c) žádné řešení. V případech a), b) vyjádřete řešení v závislosti na c, d pomocí operací sčítání a násobení nad $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

14. Určete parametry a, b, c tak, aby následující systém měl právě jedno řešení:

$$ax + by = c \ , \ cx + az = b \ , \ bz + cy = a$$

15. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametru a:

$$ax + y + z = 1 \ , \ x + ay + z = a \ , \ x + y + az = a^2$$

16. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametrech a, b:

$$ax + by + z = 1 \ , \ x + aby + z = b \ , \ x + by + az = 1$$

1. Spočtěte inverzní matice k daným maticím metodou využívající přímé a zpětné Gausovy eliminace.

a) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

2. Najděte inverzní matici B^{-1} k $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ metodou současných úprav s jednotkovou maticí. Totéž pro (čtvercové) matice z předchozích příkladů, pro matici $C = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$, (čtvercové) matice z příkladu 1, a matici typu n/n

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Zjistěte, zda daná množina tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{R}^2$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$$
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x.y \geq 0\}$$
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y+1\}.$$

Určete vždy podprostor generovaný M.

4. Popište všechny vektorové podprostory v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$.

5. Zjistěte, zda následující vektory jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ nad polem $\mathbb{R}$.
(a) $\{(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)\}$
(b) $\{(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0),(3,2,0,5)\}$

6. Prověřte lineární závislost vektorů

$$(1,-\sqrt{2},-01),\ (1-\sqrt{2},2,1+\sqrt{2}),\ (1,-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1)$$

v $\mathbb{R}^3$ nad skaláry $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^3$ nad skaláry $\mathbb{Q}$.

7. Prověřte lineární závislost polynomů v $\mathbb{R}_2[x]$.
a) $1+x,\ 1-x,\ 2+x-x^2$
b) $1-x,\ x-x^2,\ x^2-1$

8. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_2\mathbb{R}$.

9. Zjistěte, zda
 a) $(1,1,1,1)$ patří do $[(1,0,1,2),(0,0,1,3),(0,1,0,2)] \subset \mathbb{R}^4$
 b) $(-1,-4,7) \in \mathbb{R}^3$ patří do

$$[(1,-2,3),(-2,1,-1),(0,-3,5),(-2,-5,3),(-1,-1,2)].$$

10. Uvažujte $\mathbb{R}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Je $\sqrt{8} \in [1,\sqrt{2}]$? Je $\sqrt{3} \in [1,\sqrt{2}]$?

11. Nechť v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V. Potom $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 + v_2$ jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte přímo z definice lineární nezávislosti.

12. Z následujících vektorů vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů:

$$(1,0,2,4),(2,3,-1,0),(3,3,1,4),(1,1,1,1),(2,2,0,3),(1,0,0,0).$$

6. Báze vektorového prostoru, souřadnice, součty a průniky podprostorů

1. Ukažte, že následující seznamy vektorů tvoří báze příslušných vektorových prostorů, a najděte souřadnice daných vektorů vektoru v těchto bazích.
 a) $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3))$
 b) $v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$
 c) $v = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}_4[x],\ \alpha = (1+x^3, x+x^3, x^2+x^3+x^4, x^3)$
 d) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{23}(\mathbb{R})$,

$$\alpha = \Bigg(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Bigg)$$

2. Napište souřadnice vektoru $(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ v bázi
 a) $\alpha = ((-1,0,0,0),(-1,-1,0,0),(-1,-1,-1,0),(0,0,1,-1))$
 b) $\beta v = ((0,0,0,-5),(1,2,3,1),(1,0,-1,0),(0,1,1,0))$.

3. Doplňte množiny do báze $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(1,-1,0,2),(0,2,1,3),(2,0,1,7)\}$$
$$M = \{(-1,1,0,0,),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1)\}.$$

4. Určete nějakou bázi vektorového podprostoru

$$M\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$$

a doplňte ji na bázi $\mathbb{R}^n$. Vzpomeňte přitom, jak funguje Steinitzova věta o výměně.

5. Nechť $P_1=\langle M_1\rangle$, $P_2=\langle M_2\rangle$ v $\mathbb{R}^4$, kde

$$M_1=\{(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)\}$$
$$M_2=\{(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0)\}$$

Najděte P_1+P_2, $P_1\cap P_2$, jejich báze a dimenze. (Připomeňte si přitom větu $\dim P_1+\dim P_2=\dim(P_1+P_2)+\dim(P_1\cap P_2)$.)

6. V $\mathbb{R}_5[x]$ najděte bázi podprostorů
a) $P_1=\{f\in\mathbb{R}_5[x]; f(x)=f(-x)\}$
b) $P_2=\{f\in\mathbb{R}_5[x]; f(x)=-f(-x)\}$
c) $P_3=\{f\in\mathbb{R}_5[x]; f(1)=f(2)=0\}$.
Určete také $P_1\cap P_3$, P_2+P_3.

7. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1\cap U_2$ a dimenzi U_1+U_2. Přitom $U_1=[(-1,-1,2,-1),(0,-1,1,0),(-1,-2,3,-1)]$, $U_2=[(3,-1,0,2),(1,0,1,0)]$.

8. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1\cap U_2$ a dimenzi U_1+U_2. Přitom $U_1=[(2,-1,-1,-1),(1,0,-1,0),(1,-1,0,-1)]$, $U_2=[(1,1,0,0),(0,3,-1.2)]$.

9. Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ reálných matic 2×2 a jeho podmnožinu P všech matic $A=(a_{ij})$ takových, že $a_{11}+a_{22}=0$.
a) Dokažte, že P je vektorový podprostor.
b) Napište nějakou bázi podprostoru P.
c) Doplňte tuto bázi na bázi prostoru $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ a v této bázi napište souřadnice jednotkové matice.

10. Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ reálných matic 2×2 a jeho podmnožinu P všech matic $A=(a_{ij})$ takových, že $a_{11}+a_{22}=0$.
a) Dokažte, že P je vektorový podprostor.
b) Napište nějakou bázi podprostoru P.
c) Doplňte tuto bázi na bázi prostoru $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ a v této bázi napište souřadnice jednotkové matice.

11. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1\cap U_2$ a dimenzi U_1+U_2. Přitom $U_1=[(1,1,0,2),(0,0,1,2),(-1,-1,0,0)]$, $U_2=[(0,2,1,-2),(3,1,0,-1),(0,-4,0,4)]$.

12. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi $U_1\cap U_2$ a dimenzi U_1+U_2. Přitom $U_1=[(3,0,-1,1),(0,2,-3,3),(0,0,1,-1)]$, $U_2=[(3,2,2,0),(0,1,1,4),(0,2,2,0)]$.

13. Nechť $x=(1,2,3,4)$, $y=(0,1,-2,3)$, $z=(-1,0,-7,2)$, $u=(-5,2,0,-2)$, $v=(-3,0,14,-4)$. Určete dimenzi lineárního podprostoru $[x,y,z]\cap[u,v]\subset\mathbb{R}^4$.

14. Nechť $x=(-1,2,0,1)$, $y=(-2,5,-2,0)$, $z=(-1,1,2,3)$, $u=(0,1,2,3)$, $v=(2,3,-1,0)$. Určete dimenzi lineárního podprostoru $[x,y,z]\cap[u,v]\subset\mathbb{R}^4$.

7. Další úlohy o bázích a vektorových podprostorech

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte průnik podprostorů V_1 a V_2 zadaných generátory $V_1 = [(1,1,1,1),(1,0,1,0)]$, $V_2 = [(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0)]$.

Spočtěte také průnik součtu $V_1 + V_2$ s podprostorem generovaným vektorem $(1,-2,3,-4)$.

2. Považujte generátory podprostorů V_1 a V_2 z předchozího cvičení za prvky v $(Z_2)^4$, $(Z_3)^4$, resp. $\mathbb{C}^4$, a řešte znovu stejnou úlohu. Zejména si uvědomte, kolik prvků mají diskutované prostory a podprostory.

3. V prostoru polynomů $\mathbb{R}_6[x]$ uvažte podprostory $V_1 = [x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6]$, $V_2 = [2 + x^2, -1 + x^6, x^2 + x^3 + 2x^4]$, $V_3 = [x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5, x^3]$ a spočtěte jejich průnik a $V_1 + V_2 + V_3$.

4. V $\mathbb{R}^4$ určete bázi jednoho z podprostorů $P_1 + P_2$ a $P_1 \cap P_2$ a dimenzi obou. Přitom $P_1 = [(1,2,3,-1),(4,-1,0,2)]$, $P_2 = [(-2,5,6,-4),(5,-8,-9,7)]$.

5. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}_3[x]$ nad polem $\mathbb{C}$ polynomů stupně nejvýše 3 s komplexními koeficienty a jeho podmnožinu P všech polynomů $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ takových, že $a_i = a_{3-i}$ pro všechna $i = 0,1,2,3$.
(a) Dokažte, že P je vektorový podprostor.
(b) Najděte nějakou bázi tohoto podprostoru.
(c) Napište souřadnice polynomů x^2 a x^3 v bázi $(1 + x, x - 1, (x-1)^2, (1-x)^3)$.

6. V $\mathbb{R}^4$ nechť $x = (1,2,3,4)$, $y = (0,1,-2,3)$, $z = (-1,0,-7,2)$, $u = (1,4,9,-2)$ $v = (1,-1,4,1)$. Najděte dimenzi podprostorů $[x,y,z] + [u,v]$ a bázi podprostoru $[x,y,z] \cap [u,v]$.

7. V $\mathbb{R}^4$ nechť $x = (2,1,3,4)$, $y = (1,0,-2,3)$, $z = (0,1,7,-2)$, $u = (1,-1,3,2)$ $v = (1,4,2,1)$. Najděte dimenzi podprostoru $[x,y,z] + [u,v]$ a bázi podprostoru $[x,y,z] \cap [u,v]$.

8. Necht V je reálný vektorový prostor, $v_1, \dots, v_n \in V$. Označme
$$S = \{c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n;\ c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0\}.$$
Dokážte následující tvrzení: **a)** S je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. **b)** Vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé právě když, $\dim S = 0$.

9. V $(\mathbb{Z}_5)_3[x]$ určete bázi $U_1 \cap U_2$. Přitom $U_1 = [x^3 + x + 3, 2x^3 + 4x^2 + 2x, x^3 + x^2 + 4x + 1]$, $U_2 = [x^3 + 2x^2 + 1, 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1]$.

10. V $\mathbb{Z}_7^{2\times 2}$ určete bázi $U_1 \cap U_2$. Přitom

$$U_1 = [\begin{pmatrix} 1,0 \\ 6,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,6 \\ 5,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1 \\ 6,1 \end{pmatrix}],$$

$$U_2 = [\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6,2 \\ 2,1 \end{pmatrix}].$$

8. Lineární zobrazení

1. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární.

a) $f(x,y) = (x, y^2)$

b) $f(x,y) = (2x+3y, x-y)$

c) $f(x,y,z) = (x+y, x-y, x+z+2)$

d) $f(x,y,z) = (x-17y+z, 2x-5y, 13y-z)$

Zobrazení, která jsou lineární napište pomocí násobení maticí.

2. Nechť $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení dané vztahem $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

a) Najděte báze jádra $\mathrm{Ker} f$ a obrazu $\mathrm{Im} f$.

b) Doplňte bázi $\mathrm{Im} f$ na bázi celého $\mathbb{R}^4$, nejlépe bazí $\mathrm{Ker} f$, pokud to půjde (promyslete si), a napište matici f v této nové bázi.

3. Ve standardních bazích $\mathbb{R}_4[x]$ a $\mathbb{R}_8[x]$ určete matici zobrazení, které je definováno jako násobení pevně zvoleným polynomem $g \in \mathbb{R}_4[x]$.

a) Zvolte sami několik různých g a najděte vždy dimenzi jádra příslušného zobrazení.

b) Zjistěte dimenzi obrazu podprostoru $[x^2 + x^3, x - x^4]$ při některé volbě.

Promyslete si dobře, co je skutečně nutné počítat v bodech a), b).

4. Určete dimenzi obrazu a jádra zobrazení, které je definováno jako násobení maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ v $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$

a) zprava

b) zleva.

5. Najděte dimenzi a bázi obrazu průniku podprostorů V_1 a $V_2 \subset \mathbb{R}^4$ při zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$. Přitom $f(x,y,z,w) = (x + 2y + 3z + w, 2x - 3y - z - 12w, -x + y + 5w, -y - z - 2w, 2x - 3y - z - 12w)$, $V_1 = \langle (2,-1,-1,1), (-2,3,1,-1) \rangle$, $V_2 = \langle (0,2,0,0), (1,1,1,1) \rangle$. Dále zjistěte dimenzi vzoru podprostoru $W \subset \mathbb{R}^5$, generovaného vektorem $(1,1,1,1,1)$.

6. Dejte příklad zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pro které je $\mathrm{Ker} A = [(1,0,0), (1,1,1)]$, $\mathrm{Im} A = [(1,0,1)]$.

7. Rozhodněte, zda existuje lineární zobrazení $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí postupně vektory $(1,2,-3), (2,1,-2), (1,-4,5)$ na vektory $(1,2), (2,3), (1,3)$.

8. Lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ splňuje $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, $f\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Najděte vyjádření f pomocí prvků matic. Dále najděte jádro obraz f.

9. Zobrazení $A\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ je definováno předpisem $A(f)(x) = f'''(x) - 2f''(x)$, kde čárky označují derivaci polynomů podle proměnné x. Ověřte, že A je lineární, spočtěte jeho jádro, obraz.

1. Připomeňte si pojem matice zobrazení. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardní bazí $\epsilon = ((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T)$ napište matice následujících zobrazení

a) identického zobrazení $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

b) kolmé projekce do osy generované vektorem $(1,0,0)$

c) kolmé projekce do roviny generované vektory $(0,1,0), (0,0,1)$

d) násobení pevně zvoleným skalárem $a \in \mathbb{R}$.

Zapište tato zobrazení způsobem použitým ve cvičení 1 z předchozí kapitoly.

2. Najděte matici lineárního zobrazení ze cvičení 4 předchozí kapitoly ve vhodných bázích.

3. Najděte matici lineárního zobrazení ze cvičení 8 předchozí kapitoly ve standardních bázích $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a R a v bázi

$$\alpha = (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

a ve standardní bázi $\mathbb{R}$.

4. V prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ napište matici zobrazení (ve standardní bázi), která každý vektor $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ zobrazí na (ip, iq). (Matice bude reálná 2×2.)

5. Matice lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\alpha = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ je

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Najděte obraz vektoru zapsaného ve standardní bázi $(4,5,3)$.

b) Zjistěte, zda je f izomorfismus.

c) Pokud ano, najděte matici inverzního zobrazení ve standardní bázi.

6. Napište matici $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\beta,\alpha}$ identického zobrazení na $\mathbb{R}^4$ v bazích

$$\alpha = ((-1,0,0,0)^T, (-1,-1,0,0)^T, (-1,-1,-1,0)^T, (0,0,1,-1)^T)$$
$$\beta = ((0,0,0,-5)^T, (1,2,3,1)^T, (1,0,-1,0)^T, (0,1,1,0)^T),$$

tzv. matici přechodu. Napište také $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})_{\alpha,\beta}$ a uvědomte si jak se tyto matice použijí pro převod souřadnic vektorů z jedné báze do druhé.

7. V prostoru polynomů $\mathbb{R}_3[x]$ uvažme báze $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ a $\beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$. Najděte matice přechodu od α k β a naopak. Použijte je k převodu souřadnic několika polynomů.

8. Nechť $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ je matice zobrazení $f\colon \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_1[x]$ v bazích β z předchozího cvičení a standardní $(1,x)$ na $\mathbb{C}_1[x]$. Najděte obrazy polynomů $2x - x^3$, $1 + x^2$, $1 + x + x^2 + x^3$.

9. Ve standardních bazích na $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^5$ je dáno zobrazení f maticí A, g maticí B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvědomte si odkud kam tato zobrazení jdou a najděte matice jejich kompozic. Zjistěte, zda půjde o izomorfismus.

10. Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ daného pomocí matice B předpisem $\varphi((x,y,z)^T) = B\cdot(x,y,z)^T$ vzhledem k bázi $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(3,7,5)^T$ v $\mathbb{R}^3$ a $(1,1,3,0)^T$, $(-1,-6,2,-5)^T$, $(0,0,1,0)^T$, $(0,0,0,1)^T$ v $\mathbb{R}^4$.

11. Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ daného pomocí matice D předpisem $\varphi((x,y,z)^T) = D\cdot(x,y,z)^T$ vzhledem k bázi $(0,0,1)^T$, $(0,1,0)^T$, $(4,5,3)^T$ v $\mathbb{R}^3$ a $(2,0,2,5)^T$, $(1,0,0,0)^T$, $(2,-4,-6,7)^T$, $(0,1,0,0)^T$ v $\mathbb{R}^4$.

12. Uvažujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = (a - b + c)x(x^2 - 1).$$

a) Dokažte, že φ je lineární zobrazení. **b)** Najděte nějaké báze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$. **c)** Najděte nějaké báze vektorových prostorů $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{R}_3[x]$, vzhledem k nimž má matice zobrazení φ blokový tvar $\begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde I_h je jednotková matice $h \times h$. Určete nejprve hodnotu h.

13. Uvažujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = (a + 2b - c)(x^3 - 1).$$

a) Dokažte, že φ je lineární zobrazení. **b)** Najděte nějaké báze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$. **c)** Najděte nějaké báze vektorových prostorů $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{R}_3[x]$, vzhledem k nimž má matice zobrazení φ blokový tvar $\begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde I_h je jednotková matice $h \times h$. Určete nejprve hodnotu h.

14. Uvažujme zobrazení $f : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{1,2}(\mathbb{C})$, $f(X) = (\,1 \quad i\,) \cdot X$.

a) Dokažte, že f je lineární zobrazení.

b) Najděte všechny matice, které leží v jeho jádře.

c) Napište matici $(f)_{\alpha,\beta}$ zobrazení f v bázích

$$\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\beta : (\,1 \quad 0\,), (\,0 \quad 1\,).$$

15. Uvažujme zobrazení $f : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2,1}(\mathbb{C})$, $f(X) = X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

a) Dokažte, že f je lineární zobrazení.

b) Najděte všechny matice, které leží v jeho jádře.

c) Napište matici $(f)_{\alpha,\beta}$ zobrazení f v bázích

$$\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\beta : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax^2+bx+c) = (a+b)x^2+(c-b)x+(a+c)$.
a) Dokažte, že f je lineární zobrazení.
b) Najděte všechny polynomy, které leží v jeho jádře.
c) Napište matici zobrazení f ve standardní bázi $\epsilon = (1, x, x^2)$.

17. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax^2+bx+c) = (a-b)x^2+(a-c)x+(b-c)$.
a) Dokažte, že f je lineární zobrazení.
b) Najděte všechny polynomy, které leží v jeho jádře.
c) Napište matici zobrazení f ve standardní bázi $\epsilon = (1, x, x^2)$.

11. Matice přechodu

1. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ε k bázi $\alpha = ((-6,4,12)^T, (4,2,8)^T, (5,-1,3)^T)$.

2. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ε k bázi $\alpha = ((2,0,3)^T, (-1,-1,-1)^T, (2,3,1)^T)$.

3. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ϵ k bázi $\alpha = ((4,3,-1)^T, (0,1,0)^T, (-2,-4,3)^T)$. Pomocí této matice spočítejte souřadnice vektoru $v = (1,2,1)^T$ v bázi α.

4. V $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od standardní báze ϵ k bázi $\alpha = ((-2,2,-2)^T, (-1,0,1)^T, (1,0,1)^T)$. Pomocí této matice spočítejte souřadnice vektoru $v = (1,2,-1)^T$ v bázi α.

5. Nechť B je matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ve standardních bazích ε^3 and ε^2. **a)** Najděte matici tohoto zobrazení v bazích $\alpha = ((1,0,-1)^T, (1,-1,1)^T, (1,2,0)^T)$ a ε^2. **b)** Najděte matici přechodu od báze ε^2 k bázi $\beta = ((1,3)^T, (2,7)^T)$. **c)** Najděte matici zobrazení f v bazích α a β.

6. Nechť B je matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ve standardních bazích ε^3 and ε^2. **a)** Najděte matici tohoto zobrazení v bazích $\alpha = ((1,0,-1)^T, (1,-1,1)^T, (1,2,0)^T)$ a ε^2. **b)** Najděte matici přechodu od báze ε^2 k bázi $\beta = ((3,2)^T, (4,3)^T)$. **c)** Najděte matici zobrazení f v bazích α a β.

12. Afinní geometrie

1. Je dána rovina v $\mathbb{R}^4$ rovnicemi $2x_1 + 3x_2 = 6$, $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$. Určete její parametrický popis.

2. V $\mathbb{R}^5$ popište pomocí soustavy rovnic afinní podprostor zadaný parametricky

$$(1,2,3,4,5)^T + t_1(2,1,0,1,0)^T + t_2(1,5,2,6,3)^T + t_3(0,2,7,0,5)^T.$$

3. Najděte parametrickou a implicitní rovnici nadroviny σ v $\mathbb{R}^4$ určenou body $B_1 = (-1,0,-1,0)$, $B_1 = (0,2,0,1)$, $B_1 = (0,-2,2,0)$ a $B_1 = (1,0,0,-1)$. Určete její zaměření.

4. Najděte parametrické vyjádření průniku afinních podprostorů $P_1 : (1,-1,0,2)+\alpha(0,0,1,1)+\beta(1,-1,0,0)$ a $P_2 : (2,0,1,1)+\tau(1,0,1,0)+\sigma(0,-1,0,1)$ v $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi.

5. Najděte příčku mimoběžek p, q procházející bodem M. Je dáno $M = (7,0,4)$, $p : (x,y,z) = (2,-1,1) + t(1,2,1)$, $q : (x,y,z) = (1,1,1) + t(2,-1,1)$ Jak se hledá příčka zadaná směrem?

6. Najděte v $\mathbb{R}^3$ přímku p, která prochází bodem (-2,3,-4) je rovnoběžná s rovinou $\rho : -2x + 3y - z = 7$ a protíná přímku $\frac{y-3}{3} = \frac{x+2}{-2} = \frac{z-7}{2}$.

7. V rovině R^2 ja dán trojúhelník ABC. Označme po řadě A', B', C' středy jeho stran BC, AC, AB. Dokažte, že platí

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0.$$

8. Najděte příčku mimoběžek p, q procházející bodem M. $M = (0,1,-5,-3)$, $p : (x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,5,2,-1) + t(1,2,1,0)$, $q : (x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,-1,1,1) + t(3,1,0,1)$.

9. Určete vzájemnou polohu polohu přímek

(1) $p : 2x - 3y + 4 = 0$, $q : 3x + 2y - 7 = 0$
(2) $p : (x,y) = (1,-1) + t(1,-2)$, $q : 2x + y - 1 = 0$
(3) $p : (x,y) = (2,1) + t(-1,3)$, $q : (x,y) = (1,3) + t(2,-6)$

10. Zjistěte vzájmenou polohu rovin

(1) $\alpha : (x,y,z) = (1,-2,3) + t(-1,0,1) + s(2,1,0)$
$\beta : (x,y,z) = (-1,0,1) + t(1,1,2) + s(-1,3,1)$
(2) $\alpha : (x,y,z) = (2,-1,1) + t(1,1,1) + s(1,-1,0)$
$\beta : x + y - 2z + 1 = 0$
(3) $\alpha : 2x - y + z - 9 = 0$, $\beta : x + y - z = 0$

11. Najděte parametrické vyjádření přímky v $\mathbb{R}^3$ zadané

$$p : \begin{cases} 2x - y + z - 9 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Jak vypadají rovnice všech rovin procházejících danou přímkou p (tzv. svazek rovin)? Jak se získá jejich obecná rovnice z parametrického, resp. implicitního tvaru p.

12. Najděte průnik afinních podprostorů $Q_1 : (3,0,-3,3) + \alpha(1,0,-1,0)$ $+\beta(0,2,0,1)$ a $Q_2 : (4,-2,-4,2) + \tau(0,0,1,-1) + \sigma(1,2,0,0)$ v $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi.